बी.टी.सी. (द्विवर्षीय) पाठ्यक्रमानुसार

(बेसिक टीचर सर्टीफिकेट)

सेवापूर्व शिक्षक प्रशिक्षुओं के लिए पाठ्यपुस्तक

गणित

तृतीय सेमेस्टर

राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्,

उ.प्र., लखनऊ

राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ.प्र., इलाहाबाद

संरक्षक – श्री हीरा लाल गुप्ता-आई.ए.एस, सचिव बेसिक शिक्षा, उ.प्र. शासन लखनऊ

परामर्श – श्रीमती शीतला वर्मा-आई.ए.एस., राज्य परियोजना निदेशक, उ.प्र. सभी के लिए शिक्षा परियोजना परिषद्, लखनऊ

निर्देशक – श्री सर्वेन्द्र विक्रम बहादुर सिंह, निदेशक, राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, उ.प्र. लखनऊ

समन्वयक – श्रीमती नीना श्रीवास्तव, निदेशक राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ.प्र. इलाहाबाद

लेखक – श्रीमती रागिनी श्रीवास्तव, श्रीमती मंजूषा गुप्ता, श्री कैलाश बाबू तथा श्री राकेश कुमार पाण्डेय।

कम्प्यूटर ले आउट-कॉमर्शियल प्रेस, इलाहाबाद

प्राक्कथन

समय-समय पर सामाजिक बदलाव और उसके अनुरूप आवश्यकताओं को ध्यान में रखते हुए शिक्षा-प्रणाली तथा पाठ्यक्रमों में भी संशोधन एवं युगानुरूप परिवर्तन करने की आवश्यकता शिक्षा-विदों द्वारा अनुभव किया जाना एक स्वाभाविक प्रक्रिया है। इसी के अन्तर्गत राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005 तथा शिक्षक-शिक्षा की राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2009 के आलोक में उत्तर प्रदेश में प्राथमिक कक्षाओं के शिक्षकों हेतु सेवापूर्व प्रशिक्षण की केन्द्र पुरोनिधानित शिक्षक-शिक्षा योजना लागू की गयी है। इसके अन्तर्गत बी.टी.सी. के दो वर्षीय पाठ्यचर्या का पुनरीक्षण कर समावेशी विभिन्न विषयों के पाठ्यक्रमों को समुन्नत किया गया है तथा प्रशिक्षु शिक्षकों से यह अपेक्षा की गयी है कि वे बिना किसी भय के शिक्षार्थियों के ज्ञानार्जन में उनकी सहायता कर सकें। नवीन पाठ्यचर्या एवं पाठ्यक्रमों के सन्निहित उद्देश्यों को दृष्टिगत कर राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ.प्र., इलाहाबाद द्वारा विज्ञान एवं गणित विषयों की पाठ्य-पुस्तकों का सृजन किया गया है।

पाठ्यपुस्तकों की संरचना करते समय इस बात को विशेष महत्त्व देते हुए भरपूर प्रयास किया गया है कि प्रशिक्षित शिक्षक की ओजभरी वाणी में इतना आकर्षण एवं शक्ति हो कि वह शिक्षाग्रहण करने वाले प्रशिक्षणार्थियों के मन की समस्त दुविधाओं को दूर कर उनकी बुद्धि का पूरा लाभ उन्हें प्रदान कर सके तथा वह गुरुजनों को अपने माता-पिता के समान अपना सच्चा मार्गदर्शक समझकर उनके द्वारा प्रदत्त ज्ञान को प्राप्त कर सके।

विज्ञान और गणित विषय ही समाज को मानव जीवन को जीवन्त बनाने, उसे सब प्रकार के भौतिक सुखों से आप्लावित करने, भविष्य की सुखदयोजनाओं की संकल्पना करने, उसका ब्लू-प्रिन्ट तैयार कर उसे कार्यान्वित करने का सार्थक स्वप्न दिखाते हैं। इन स्वप्नों को साकार करने के बीज जब प्राथमिक और उच्च प्राथमिक स्तर पर बच्चों के उर्वर मन में बो दिया जाता है तथा शिक्षक की वाणी की ज्ञान गंगा जब उन्हें निरन्तर सींचती रहती है, तो उसी में से एक दिन रमन, जगदीश चन्द्रबोस जैसे महान वैज्ञानिक तथा रामानुजन, शकुन्तला जैसे महान गणितज्ञ पैदा होते हैं। यह मानकर चलिए कि हमारे विद्या मन्दिर के प्रत्येक बालक-बालिका के उर में एक वैज्ञानिक, एक गणितज्ञ सोया हुआ है, बस आवश्यकता है कि उसे कैसे जगायें, कैसे ऊर्जा स्थित करें और कैसे सृजनात्मकता के पाठ पढाये और कैसे उसे ज्ञान, बोध, अनुप्रयोग और कौशल के सारे गुर सिखायें कि वह आगे चलकर अपनी अद्‌भुत प्रतिभा से राष्ट्र को समुन्नत करने का बीड़ा उठा सके।

सीमित समयान्तर्गत गणित विषय की पाठ्यपुस्तक को आकर्षक कलेवर प्रदान करने में हमें श्री सर्वेन्द्र विक्रम बहादुर सिंह निदेशक, राज्य शैक्षिक अनुसन्धान और प्रशिक्षण परिषद्, उत्तर प्रदेश, लखनऊ का समय-समय पर जो अत्यन्त उपयोगी मार्ग दर्शन प्राप्त हुआ है, उसके लिए मैं उनके प्रति हार्दिक कृतज्ञता ज्ञापित करती हूँ। पाठ्य-पुस्तक के प्रणयन में लेखक मण्डल के सभी सदस्यों के अमूल्य सहयोग के लिए भी मैं उनके प्रति अपना आभार व्यक्त करती हूँ। शिक्षाविद् परामर्शदाताओं के सतत सहयोग से इस पाठ्यपुस्तक को निखारने में हमें जो सहयोग मिला है, उसके लिए भी मैं उन्हें धन्यवाद देती हूँ। मैं अपने संस्थान के सभी विद्वान सहयोगियों को भी हृदय से धन्यवाद देती हूँ जिनके अहर्निश परिश्रम के बल पर ही यह पाठ्यपुस्तक अन्तिम स्वरूप को ग्रहण कर सकी है।

सुधार और संशोधन की कोई सीमा नहीं होती है। मैं शिक्षा जगत के सभी सुधीजनों से अपेक्षा करती हूँ कि वे अपने सकारात्मक सुझावों से हमें अवश्य अवगत करायेंगे जिससे पाठ्य पुस्तक के अगले संस्करण को और अधिक ऊर्जावान एवं सार्थक बनाया जा सके।

श्रीमती नीना श्रीवास्तव
निदेशक
राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ.प्र., इलाहाबाद

विषय-सूची

इकाई-1
अनुपात, समानुपात, अनुलोम एवं प्रतिलोम समानुपात का अर्थ

इस इकाई के अध्ययनोपरान्त निम्नांकित की जानकारी प्राप्त होगी—

* अनुपात एवं समानुपात के अर्थ
* अनुलोम एवं प्रतिलोम समानुपात का अर्थ

सर्वप्रथम हम अनुपात एवं समानुपात के विषय में चर्चा करेंगे।

प्रशिक्षुओं को पाँच-पाँच या सुविधाजनक किसी निश्चित संख्या के समूहों में बाँटे। प्रत्येक समूह के प्रशिक्षुओं से उनके गणित विषय (पूर्णांक 100) के प्राप्तांकों की सारिणी बनवाएँ।

अब एक समूह के प्राप्तांकों की सारिणी को श्यामपट्ट पर बनवाएँ।

प्रशिक्षुओं के नाम	**प्राप्तांक**
रमेश	40
मोहन	70
डेविड	65
इब्राहिम	67
रज़िया	80

एक दूसरे के प्राप्तांकों की तुलना करने के लिए निम्नांकित प्रश्न पूछें—

(i) रमेश का प्राप्तांक मोहन के प्राप्तांक से कितना कम है?

(ii) रज़िया का प्राप्तांक, रमेश के प्राप्तांक का कितना गुना है?

रज़िया और रमेश के प्राप्तांकों में अनुपात

$= 80 : 40$

$= \frac{80}{40}$

$= \frac{2}{1}$

यहाँ पर प्रशिक्षु देखें कि रज़िया और रमेश के प्राप्तांकों के अनुपात को 2 : 1 के रूप में भी लिखा जा सकता है।

प्रशिक्षुओं को स्पष्ट करें कि रजिया और रमेश के प्राप्तांकों की तुलना भाग द्वारा की गई है। भाग का चिह्न ÷ अनुपात में : के रूप में प्रकट किया जाता है।

(iii) इसी प्रकार अन्य प्रशिक्षुओं के प्राप्तांकों का अनुपात ज्ञात करवाएँ।

प्रशिक्षुओं से निष्कर्ष निकलवाएँ कि—

> अनुपात दो संख्याओं की भाग द्वारा तुलना है जिससे ज्ञात होता है एक संख्या दूसरी संख्या की कितनी गुनी है या उसका कौन सा भाग है?

अनुपात के सम्बन्ध में आवश्यक बातें—

1. अनुपात का कोई मात्रक नहीं होता है।
2. अनुपात केवल दो सजातीय राशियों के परिमाणों में होता है।
3. अनुपात के दोनों पदों में एक ही संख्या से गुणा करने या भाग करने से अनुपात के मान में अन्तर नहीं आता है।
4. अनुपात निकालने के लिए अनुपाती पदों को एक ही इकाई में बदलना आवश्यक होता है।

यथा 225 सेमी : 2 मी = 225 सेमी : 200 सेमी

= 9 : 8

समानुपात

प्रशिक्षुओं से निम्नांकित प्रश्न करवाएँ—

1. गणित की एक पुस्तक का मूल्य = ` 50 है।
   (i) दो पुस्तकों का कितना मूल्य होगा?
   (ii) पुस्तकों की संख्या में क्या अनुपात है?
   (iii) पुस्तकों के मूल्यों में क्या अनुपात है?

पुस्तकों की संख्या दो गुनी होने पर मूल्य भी, दो गुना अर्थात् ` 100 हो जायेगा।

1 पुस्तक : 2 पुस्तक = ` 50 : ` 100

या 1 : 2 = 50 : 100

2. मोहन साइकिल से 2 घण्टे में 20 किमी. जाता है।
   (i) उसी चाल से वह 3 घण्टे में कितनी दूरी तय करेगा?

(ii) समय में क्या अनुपात है?

(iii) दूरी में क्या अनुपात होगा?

समय में अनुपात = 2 घण्टा : 3 घण्टा

= 2 : 3

∵ समय डेढ़ गुना हो गया है।

∴ चली गई दूरी भी डेढ़ गुना होगी।

अर्थात् 3 घण्टे में चली गई दूरी

$= 20 \times \frac{3}{2}$ किमी

= 30 किमी

2 घण्टा : 3 घण्टा = 20 किमी : 30 किमी

इस प्रकार,

2 : 3 = 20 : 30

जब दो अनुपात समान हों, तो उनसे समानुपात (सम + अनुपात) बनता है।

समानुपात का चिह्न : : है।

2 : 3 : : 20 : 30 में समानुपात के बाह्य पद 2 और 30 तथा मध्य पद 3 और 20 है।

अनुलोम समानुपात :

1. प्रशिक्षुओं से निम्नांकित प्रकार की सारिणी बनवाएं जिसमें गणित की पुस्तकों की संख्या और उनके मूल्य अंकित हों—

पुस्तकों की संख्या	1	2	3	4	5	6	7
पुस्तकों के मूल्य में रुपयों की संख्या	6	12	18	24	30	36	42
अनुपात	1 : 6	2 : 12 या, 1 : 6	3 : 18 या, 1 : 6	4 : 24 या, 1 : 6	5 : 30 या, 1 : 6	6 : 36 या, 1 : 6	7 : 42 या 1 : 6

उक्त सारिणी के आधार पर प्रशिक्षुओं से निम्नांकित प्रश्न पूछें—

(i) पुस्तकों की संख्या दो गुनी होने पर उनका मूल्य किस अनुपात में बढ़ता है?

इसी प्रकार अन्य प्रश्न पूछ कर यह निष्कर्ष निकालें कि पुस्तकों की संख्या बढ़ने पर पुस्तकों के मूल्य में उसी अनुपात में वृद्धि होती है। अतः पुस्तकों की संख्या तथा उनके मूल्य में अनुलोम सम्बन्ध है। इसे तीरों द्वारा निम्नांकित ढंग से व्यक्त किया जाता है—

पुस्तक की संख्या	मूल्य
1 ↓	6 ↓
2	12

जब दो राशियाँ इस प्रकार से हों कि एक के बढ़ने पर दूसरी राशि में उसी अनुपात में वृद्धि हो अथवा एक के घटने पर दूसरी राशि में भी इसी अनुपात में कमी हो, तो ये राशियाँ अनुलोमानुपाती कहलाती हैं।

2. प्रशिक्षुओं से निम्नांकित प्रश्न के विषय में चर्चा करें।

एक रेलगाड़ी 2 घण्टे में 120 किमी दूरी तय करती है। उसी चाल से वह 5 घण्टे में कितनी दूरी तय कर लेगी?

समय (घण्टे में)	दूरी (किमी में)
2 ↓	120 ↓
5	x

मान लिया कि रेलगाड़ी 5 घण्टे में x किमी दूरी तय करेगी। समय और दूरी अनुलोमानुपाती राशियाँ हैं।

अतः $2 : 5 :: 120 : x$

या $2 \times x = 5 \times 120$

$\therefore \quad x = \frac{5 \times 120}{2}$

या $x = 300$

अतः गाड़ी 5 घण्टे में 300 किमी. दूरी तय करेगी।

प्रतिलोम समानुपात :

1. प्रशिक्षुओं से निम्नलिखित प्रकार की सारिणी बनवाएँ जिसमें किसी काम को पूरा करने में मजदूरों की संख्या तथा दिनों की संख्या दी हो—

मजदूर	दिन
10	30
15	20
20	15
30	10

उक्त सारिणी के आधार पर प्रशिक्षुओं से निम्नांकित प्रश्न पूछें—

(i) 10 मजदूर किसी काम को 30 दिन में पूरा करते हैं। मजदूरों की संख्या दो गुनी होने पर दिनों की संख्या में क्या अनुपात हुआ?

(ii) मजदूरों की संख्या तीन गुनी होने पर दिनों की संख्या में क्या अनुपात हुआ?

प्रशिक्षुओं के उत्तरों के आधार पर निष्कर्ष निकलवाएँ कि मजदूरों की संख्या जिस अनुपात में बदलती है। उसी के प्रतिलोम अनुपात में दिनों की संख्या भी बदलती है। अतः मजदूरों की संख्या और दिनों की संख्या में प्रतिलोम सम्बन्ध है।

इसे तीरों द्वारा निम्नांकित ढंग से व्यक्त किया जाता है—

मजदूरों की संख्या	दिनों की संख्या
10 ↓	30 ↑
20	15

> जब दो राशियाँ इस प्रकार से सम्बन्धित हों कि एक राशि के बदलने पर दूसरी राशि उसी के प्रतिलोम अनुपात में बदलती हो तो ये राशियाँ प्रतिलोमानुपाती कहलाती हैं।

2. प्रशिक्षुओं से निम्नांकित प्रश्न हल करवाएँ :

एक बस इलाहाबाद से लखनऊ की दूरी 30 किमी/घण्टे की चाल से 7 घण्टे में तय करती है। इसी दूरी को वापसी बस किस चाल से 5 घण्टे में तय कर लेगी?

मान लिया बस की अभीष्ट चाल $= x$ किमी/घण्टे

चाल (किमी/घण्टा)	समय (घण्टे)
30 ↓	7 ↑
x	5

चाल और समय में प्रतिलोम सम्बन्ध है।

$$\therefore \quad \frac{30}{x} = \frac{5}{7}$$

या, $$x = \frac{30 \times 7}{5} = 42$$

$\therefore$ बस की अभीष्ट चाल = 42 किमी/घण्टा

मूल्यांकन

1. सरलतम रूप में अनुपात ज्ञात कीजिए—

   (i) 2 का 4 से

   (ii) 15 का 3 से

   (iii) 50 पैसे का ` 3 से

   (iv) 2 घण्टे का 30 मिनट से

2. कौन सा अनुपात बड़ा है?

   (i) 3 : 5 और 5 : 8 में

   (ii) 2 : 7 और 6 : 8 में

   (iii) 40 पैसे : ` 2 और 60 पैसे : ` 4 में

3. एक आयताकार कमरे की लम्बाई और चौड़ाई में 5 : 4 का अनुपात है। यदि कमरे की लम्बाई 15 मीटर हो तो चौड़ाई होगी :

   (i) 10 मीटर

   (ii) 12 मीटर

   (iii) 9 मीटर

   (iv) 18 मीटर

4. यदि 6, 18, x, 15 समानुपात में है तो x का मान होगा—

   (i) 3

   (ii) 5

   (iii) 6

   (iv) 8

5. एक विद्यालय में 250 बच्चे पढ़ते हैं, जिनमें से 70 बच्चे प्रदूषित जल पीने से बीमार पड़ गये। स्वस्थ और बीमार बच्चों की संख्या में अनुपात ज्ञात कीजिए।

6. मोहन ने ` 70 में 10 किग्रा अमरूद बेचे तथा श्याम ने 5 किग्रा अमरूद ` 35 में बेचे। किसका अमरूद सस्ता है? यदि ऐसा है तो वे किस भाव में अमरूद बेच रहे हैं? क्या दोनों अमरूद एक ही भाव में बचे रहे हैं।

———

इकाई-2

समानुपाती राशियों में बाह्य पदों एवं मध्य पदों के गुणनफल में सम्बन्ध

इस इकाई के अध्ययनोपरान्त हमें निम्नांकित की जानकारी होगी—

(1) समानुपात के पदों में सम्बन्ध

प्रशिक्षु सर्वप्रथम निम्नांकित सारणी को ध्यान से देखें—

क्रमांक	समानुपाती पद	बाह्य पदों का गुणनफल	मध्य पदों का गुणनफल	क्या बाह्य पदों का गुणनफल = मध्यपदों का गुणनफल
1.	1 : 2 : : 4 : 8	8	8	हाँ
2.	5 : 6 : : 15 : 18			
3.	3 : 4 : : 24 : 32			
4.	2.5 : 2.4 : : 7.5 : 7.2			
5.	2 : 5 : : 4 : 10			

उक्त सारिणी से प्रशिक्षु यह निष्कर्ष निकालें कि

बाह्य पदों का गुणनफल, मध्य पदों के गुणनफल के बराबर होता है।

उक्त निष्कर्ष के आधार पर प्रशिक्षुओं से निम्नांकित प्रश्न हल कराएँ—

(i) संख्याएँ 3, 9, 9, 27 समानुपात में है या नहीं।

$3 \times 27 = 81$

$9 \times 9 = 81$

या, $3 \times 27 = 9 \times 9$

$\therefore$ 3, 9, 9, 27 समानुपात में है।

(ii) $30 : 45 : : 16 : x$ में x का मान निकालिए।

$30 \times x = 45 \times 16$

या, $x = \dfrac{45 \times 16}{30}$

या, $x = 24$

(iii) एक पार्क की लम्बाई और चौड़ाई में अनुपात 5 : 3 है। यदि पार्क की लम्बाई 95 मी. हो, तो उसकी चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

मान लिया कि पार्क की चौड़ाई x मी. है।

$\because$ पार्क की लम्बाई : पार्क की चौड़ाई = 5 : 3

$\therefore$ $95 : x = 5 : 3$

बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

या, $95 \times 3 = x \times 5$

या, $x = \dfrac{95 \times 3}{5} = 57$ मी

$\therefore$ पार्क की चौड़ाई 57 मी है।

प्रशिक्षु लम्बाई और चौड़ाई में अनुपात ज्ञात करें और उत्तर की जाँच करें।

मूल्यांकन :

1. निम्नांकित प्रश्न में सत्य/असत्य कथन है—

   समानुपात पदों 20 : 30 : : 60 : 90 में

   (i) 20 और 60 मध्य पद हैं।

   (ii) 30 और 90 बाह्य पद हैं।

   (iii) 20 और 30 बाह्य पद हैं।

   (iv) 30 और 60 मध्य पद हैं।

2. नीचे लिखे समानुपाती पदों में x का मान ज्ञात कीजिए :

   (i) $x : 10 : : 20 : 40$ (ii) $16 : 8 : : 8 : x$

   (iii) $30 : 120 : : x : 300$ (iv) $2.5 : x : : 1.25 : 2.5$

3. 25, 75, 500, 1000 समानुपात में नहीं है क्योंकि :

   (i) यहाँ कोई वाह्य पद नहीं है।

   (ii) वाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल नहीं है।

   (iii) वाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

   (iv) मध्य पदों का गुणनफल 3750 है।

4. एक विद्यालय के लड़के और लड़कियों ने अलग-अलग 2 : 3 के अनुपात में पौधा लगाये। यदि विद्यालय में कुल 1500 पौधे लगाये गए हों तो लड़के और लड़कियों द्वारा लगाये गए पौधों की संख्या अलग-अलग निकालिए।

5. रमेश ने ` 80 में 2 किग्रा. सेब बेचा और मोहन ने 5 किग्रा सेब ` 200 में बेचा। क्या दोनों ने एक ही भाव में सेब बेचे?

———

इकाई-3
घातांक की अवधारणा

इस इकाई के अध्ययनोपरांत हमें निम्नांकित की जानकारी होगी—

1. घातीय संकेतन में आधार एवं घातांक।
2. घाताकों के नियम (धनात्मक आधार पर)

प्रशिक्षु, संख्या 1000000000 पर विचार करें।

पृथ्वी का द्रव्यमान 597 000 000 000 000 000 000 000 0 किग्रा. है।

अब आप लोग देख रहे हैं कि ऐसी संख्याओं को सरलता से नहीं पढ़ा जा सकता है।

इस प्रकार की ऐसी अन्य दूसरी बहुत बड़ी संख्याओं का पढ़ना, समझना एवं अन्तर ज्ञात करना और उनकी तुलना करना कठिन है। अतः इन संख्याओं को सरलता से पढ़ने और समझने तथा आपस में तुलना करने के लिए हम घातांकों का प्रयोग करते हैं।

घातांक

बड़ी संख्याओं का संक्षिप्त रूप निम्नवत् हैं—

$100000 = 10^5$

यहाँ पर 10^5 संक्षिप्त संकेतन है जो कि गुणनफल $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ को व्यक्त करता है। 10^5 को पढ़ा जाता है, "10 के ऊपर घात पाँच या 10 की घात पाँच।"

यहाँ 10 आधार (base) और 5 घातांक (Power of Index) कहलाता है।

10^5 को 100,000 का घातांकीय रूप (Exponential form) कहा जाता है।

प्रशिक्षुओं से 64 और 81 को घात के रूप में व्यक्त करने के विषय में चर्चा करें।

घातीय संकेतन में आधार एवं घातांक

प्रशिक्षु निम्नांकित सारणी को देखें :

घातीय संकेतन (घात) रूप	अर्थ (गुणा रूप)	मान	आधार	घातांक
2^3	$2 \times 2 \times 2$	8	2	3
3^2	3×3	9	3	2
5^6	$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$	15625	5	6

उपर्युक्त सारणी को देखने के बाद प्रशिक्षुओं को अन्य संख्याओं के घातांक इत्यादि पर विचार करने को कहे।

प्रशिक्षुओं से पूर्णांकों की भाँति ही किसी परिमेय संख्या के द्वारा कई बार गुणन को या घातीय संकेतन द्वारा व्यक्त करने के विषय में अवगत करायें।

जैसे—$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^5$

यहाँ पर आधार $=\frac{2}{3}$ और घातांक 5 है, तथा इसे $\frac{2}{3}$ की घात 5 पढ़ते हैं।

अब किसी निश्चित संख्या के स्थान पर यदि सामान्य रूप में a को आधार लेते हैं, तो संख्या को निम्नलिखित रूप में व्यक्त करते हैं—

$a \times a \times a = a^3$ (इसे a की घात 3 या a का घन पढ़ेंगे)

$a \times a \times a \times a \times a = a^5$ (इसे a की घात 5 पढ़ेंगे)

अब प्रशिक्षु निम्नांकित सारणी के निष्कर्ष पर पहुँचता है—

1. n कोई प्राकृतिक संख्या होने पर, (धन पूर्णांक)^n = धन पूर्णांक
3. n विषम प्राकृतिक संख्या होने पर, [ऋण पूर्णांक]^n = ऋण पूर्णांक
4. n सम प्राकृतिक संख्या होने पर $(-1)^n = 1$
5. n विषम प्राकृतिक संख्या होने पर, $(-1)^n = -1$

घातांकों का नियम

प्रशिक्षुओं को निम्नांकित घातांकों के नियम से अवगत करायें :

नियम 1.—एक ही आधार वाली घातीय संख्याओं का गुणन।

आइए, $2^3 \times 2^4$ का मान ज्ञात करते हैं।

$2^3 \times 2^4 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2)$

$2^3 \times 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^7$

या $2^3 \times 2^4 = 2^{(3 + 4)}$

$= 2^7$

आपको यहाँ पर ध्यान से देखने पर यह प्राप्त होता है कि 2^3 और 2^4 का आधार समान है और घातांकों का योगफल 7 है। अतः हम व्यापक रूप से कह सकते हैं कि—

यदि a एक शून्येतर धनात्मक परिमेय संख्या तथा m और n कोई दो धन पूर्णांक हों, तो
$a^m \times a^n = a^{m+n}$

विशेष : $2^3 \times 3^2$ या $3^5 \times 5^3$ प्रकार के घातांकों पर ध्यान दीजिए। क्या आप इन्हें जोड़ सकते हैं?

इन घातांकों के आधार समान नहीं हैं। अतः इन घातांकों को नहीं जोड़ा जा सकता।

नियम 2 : एक ही आधार वाली घातांकीय संख्याओं का विभाजन :

उदाहरण : $2^7 \div 2^3$ को ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} 2^7 \div 2^3 &= \frac{2^7}{2^3} = \frac{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}{2\times2\times2} \\ &= 2\times2\times2\times2 \\ &= 2^4 \end{aligned}$$

$\therefore \quad 2^7 \div 2^3 = 2^4$

इस प्रकार

$$2^7 \div 2^3 = \frac{2^7}{2^3} = 2^{7-3} = 2^4$$

अतः यदि a एक शून्येतर धनात्मक परिमेय संख्या तथा m और n कोई दो धनात्मक पूर्णांक हों, जहाँ $m > n$

तो $a^m \div a^n = a^{(m-n)} = \frac{1}{a^{n-m}}$

प्रशिक्षु a^0 के मान पर विचार करें।

आप देखेंगे कि a^0 का मान 1 प्राप्त होता है। जहाँ पर a एक शून्येतर परिमेय संख्या है।

टिप्पणी : हम जानते हैं कि 0 से भाग परिभाषित नहीं है, अतः 0^0 परिभाषित नहीं है, क्योंकि

$0^0 = 0^{n-n} = \frac{0^n}{0^n}$ में भाजक शून्य है।

अतः 0^0 परिभाषित नहीं है।

नियम 3 : किसी घात वाली संख्या की भी घात ज्ञात की जा सकती है।

जैसे— $\left[(5)^4\right]^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned}\left[(5)^4\right]^3 &= (5)^4 \times (5)^4 \times (5)^4 \\ &= (5\times5\times5\times5)\times(5\times5\times5\times5)\times(5\times5\times5\times5) \\ &= 5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5 \\ &= 5^{12} = 5^{(4\times3)}\end{aligned}$$

अर्थात् $\left[(5)^4\right]^3 = 5^{4\times3}$

इसी प्रकार, $$\left[\left(\frac{4}{7}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\right)$$
$$= \frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}$$

$$= \left(\frac{4}{7}\right)^6 = \left(\frac{4}{7}\right)^{2\times3}$$

अर्थात् $\left[\left(\frac{4}{7}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{4}{7}\right)^{2\times3}$

उपर्युक्त से यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि यदि a एक शून्येतर परिमेय संख्या हो तथा m और n कोई धन पूर्णांक हों, तो

$$(a^m)^n = a^{m\times n}$$

नियम 4 : पृथक आधार किन्तु समान घातांक वाली संख्याओं का गुणन

क्या आप $2^4 \times 3^4$ को सरल कर सकते हैं?

ध्यान दीजिए कि यहाँ पर दोनों पदों के घातांक समान हैं किन्तु आधार अलग हैं।

देखें, $2^4 \times 3^4 = ?$

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

& $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$$\therefore \quad 2^4 \times 3^4 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$$
$$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$$
$$= (2 \times 3)^4$$

अर्थात् $2^4 \times 3^4 = (2 \times 3)^4$

इसी प्रकार,

$$\left(\frac{5}{7}\right)^3 \times \left(\frac{8}{9}\right)^3 = \left(\frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7}\right) \times \left(\frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9}\right)$$
$$= \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9}$$
$$= \left(\frac{5}{7} \times \frac{8}{9}\right) \times \left(\frac{5}{7} \times \frac{8}{9}\right) \times \left(\frac{5}{7} \times \frac{8}{9}\right)$$
$$= \left(\frac{5}{7} \times \frac{8}{9}\right)^3$$

अर्थात् $\left(\frac{5}{7}\right)^3 \times \left(\frac{8}{9}\right)^3 = \left(\frac{5}{7} \times \frac{8}{9}\right)^3$

उपर्युक्त उदाहरणों से यह निष्कर्ष निकलता है कि :

> यदि a और b कोई दो शून्येतर परिमेय संख्याएँ हों तथा m एक धन पूर्णांक हो, तो
>
> $$a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

नियम 5 : पृथक आधार किन्तु समान घातांक वाली संख्याओं का भाग।

देखिए :

$$8^6 \div 9^6 = \frac{8^6}{9^6} = \frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8}{9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9}$$

$$= \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9}$$

$$= \left(\frac{8}{9}\right)^6$$

अर्थात् $$8^6 \div 9^6 = \frac{8^6}{9^6} = \left(\frac{8}{9}\right)^6$$

इसी प्रकार

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3 \div \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^3}{\left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{\frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3}}{\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{6}} \times \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{6}} \times \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{6}}$$

$$= \left(\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{6}}\right)^3$$

अर्थात् $$\left(\frac{4}{3}\right)^3 \div \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^3}{\left(\frac{5}{6}\right)^3} = \left(\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{6}}\right)^3$$

इसी प्रकार अन्य उदाहरण लेकर प्रशिक्षु स्वयं हल करने का प्रयास करें।

उपर्युक्त अन्य उदाहरणों से यह निष्कर्ष मिलता है कि :

> यदि a और b कोई दो शून्येतर परिमेय संख्याएँ हों तथा n एक धन पूर्णांक हों,
>
> तो, $a^n \div b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ तथा $b^n \div a^n = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

अभी तक तुमने घातांक को पूर्णांक रूप में पढ़ा है।

अब, हम किसी संख्या के घातांक भिन्न के रूप में चर्चा करेंगे।

$\because \quad 7 \times 7 = 49$

$\therefore \quad$ 7 का वर्ग, 49 है।

अर्थात्, यदि $7^2 = 49$

तब $7 = \sqrt{49}$

सामान्य रूप में,

$$a^m \times a^m = a$$

या $a^{2m} = a^1$

घातांकों की तुलना करने पर,

$$2m = 1$$

या $m = \frac{1}{2}$

अतः $\boxed{a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}}$

इसी प्रकार $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

$$a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$$

सामान्य रूप में,

$$\boxed{a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}}$$

उदाहरण (1) : $a^{-\frac{1}{3}} \times 2a^{-\frac{1}{2}}$ का मान ज्ञात करना है।

अब, $a^{-\frac{1}{3}} \times 2a^{-\frac{1}{2}} = 2a^{-\frac{1}{3}} \times a^{-\frac{1}{2}}$

$$= 2a^{-\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= 2a^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}$$

$$= 2a^{-\frac{5}{6}}$$

उदाहरण (2) : $\frac{2a^{-2}}{a^{-\frac{3}{2}}}$ का मान ज्ञात करना है।

अब, $\frac{2a^{-2}}{a^{-\frac{3}{2}}} = 2a^{-2} \div a^{-\frac{3}{2}}$

$$= 2a^{-2} \times a^{\frac{3}{2}}$$

$$= 2a^{-2+\frac{3}{2}}$$

$$= 2a^{-\frac{1}{2}}$$

या, $\frac{2a^{-2}}{a^{-\frac{3}{2}}} = \frac{2}{a^{2-\frac{3}{2}}} = \frac{2}{a^{\frac{1}{2}}}$ या $\frac{2}{\sqrt{a}}$

उदाहरण (3) : $(243)^{\frac{3}{5}}$ का मान ज्ञात करना है।

अब, $(243)^{\frac{3}{5}} = (3^5)^{\frac{3}{5}} = 3^3 = 27$

मूल्यांकन :

1. $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$ का मान है—

(i) $\frac{32}{243}$ (ii) $-\frac{32}{243}$

(iii) $\frac{10}{15}$ (iv) $-\frac{10}{15}$

2. 3125 का घाती संकेतन है—

(i) 5^2 (ii) 5^5

(iii) 5^3 (iv) 5^4

3. 2 की घात 7 का मान है—

(i) 49 (ii) 14

(iii) 128 (iv) 32

4. $3^{12} \times 3^7 \div 3^{25}$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. $(-1)^{49} \div (-1)^{25}$ का मान बताइए।

6. $4 \times 5^2 + 5 \times 4^2$ का मान क्या होगा?

7. $\left(\frac{4}{9}\right)^3 \times \left(\frac{4}{9}\right)^4 \div \left(\frac{4}{9}\right)^5$ का मान बताइये।

8. $(64)^{-2/3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

———

इकाई-4

पूर्णांक तथा परिमेय संख्याओं को (धनात्मक आधार पर) घातांक रूप में लिखना

इस इकाई के अध्ययनोपरांत हमें निम्नांकित की जानकारी होगी :

1. परिमेय संख्याओं को घात के रूप में व्यक्त करना।
2. धनात्मक एवं ऋणात्मक घातांक
3. बड़ी एवं छोटी संख्याओं को घातांकीय रूप में व्यक्त।

परिमेय संख्याओं को घात के रूप में व्यक्त करना :

हम जानते हैं कि परिमेय संख्याएँ $\frac{p}{q}$ के रूप की होती है, जहाँ p, q पूर्णांक होते हैं तथा $q \neq 0$; इस प्रकार सभी पूर्णांक भी परिमेय संख्याएँ हैं।

देखिए,

$$2 = \frac{2}{1} = \left(\frac{2}{1}\right)^1, 3 = \frac{3}{1} = \left(\frac{3}{1}\right)^1, \frac{4}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^1,$$

इसी प्रकार,

$$6 = (6)^1,\ 8 = 8^1,\ 8 = (2)^3$$

$$-\frac{27}{125} = \left(-\frac{27}{125}\right)^1 \quad \text{और} \quad \frac{-27}{125} = \frac{(-3)\times(-3)\times(-3)}{5\times5\times5} = \left(\frac{-3}{5}\right)^3$$

$$\frac{16}{625} = \left(\frac{16}{625}\right)^1, \frac{16}{625} = \left(\frac{4}{25}\right)^2 \quad \text{तथा} \quad \frac{16}{625} = \left(\frac{2}{5}\right)^4$$

ध्यान दें, जिस संख्या को घात रूप में केवल एक ही प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है, उसका घातीय संकेतन (घात रूप) अद्वितीय होता है।

जैसे— $\frac{5}{12} = \left(\frac{5}{12}\right)^1, 6 = 6^1, 3 = 3^1, 15 = 15^1$ इत्यादि।

यदि किसी संख्या को भिन्न-भिन्न आधारों पर घात रूप में व्यक्त किया जा सके तो उसका घातीय संकेतन अद्वितीय नहीं होता है।

जैसे—परिमेय संख्या 729 को आधार 3 और 9 के घातीय संकेतनों में देखिए—

$729 = 3^6$; आधार 3, घात 6

$729 = 9^3$; आधार 9, घात 3

$729 = (27)^2$; आधार 27, घात 2

अतः उपर्युक्त उदारहणों से हम पाते हैं कि—

1. किसी भी परिमेय संख्या को उसके घात 1 के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। जैसे— $a = (a)^1$।
2. सभी अभाज्य संख्याओं का घातीय संकेतन अद्वितीय होता है।
3. भाज्य संख्याओं में कुछ का घातीय संकेतन अद्वितीय और कुछ का अद्वितीय नहीं होता।

पुनः देखिए,

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

तथा $$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

अतः $$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5}$$

इसी प्रकार,

$$\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \left(\frac{3}{7}\right)^6$$

या, $$\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}$$
$$= \frac{3^6}{7^6}$$

इसी प्रकार,

$$\frac{p}{q} \times \frac{p}{q} \times \frac{p}{q} \times \ldots m \text{ बार } = \left(\frac{p}{q}\right)^m$$

तथा $\dfrac{p \times p \times p \times \ldots m \text{ बार}}{q \times q \times q \times \ldots m \text{ बार}} = \dfrac{p^m}{q^m}$

अतः $\left(\dfrac{p}{q}\right)^m = \dfrac{p^m}{q^m}$.

इस तथ्य का उपयोग करके हम किसी परिमेय संख्या के घातीय संकेतन (घात रूप) को एक परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। इसी प्रकार कुछ परिमेय संख्याओं को किसी परिमेय संख्या के घात रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$10^0 = \frac{10}{10} = 1$$

इसी प्रतिरूप को आगे बढ़ाने पर,

$$10^{-1} = \frac{1}{10}$$
$$10^{-2} = \frac{1}{10 \times 10} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$
$$10^{-3} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$$

ध्यान दीजिए जब 10 का घातांक 1 कम होता है तब मान, पूर्व मान का $\frac{1}{10}$ वाँ भाग हो जाता है।

अतः $10^{-1} = \dfrac{1}{10}$, $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2}, 10^{-3} = \dfrac{1}{10^3}$ ।

इसी प्रकार,

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$
$$\frac{3^3}{3} = \frac{3 \times 3 \times 3}{3} = \frac{27}{3}$$
$$3^{3-1} = 3^2 = 3 \times 3 = 9$$
$$\frac{3^2}{3} = \frac{3 \times 3}{3} = \frac{9}{3}$$
$$3^{2-1} = 3 = 3$$

$$\frac{3^1}{3} = \frac{3}{3}$$

$$3^{1-1} = 3^0 = 1$$

इन प्रतिरूपों से हम कह सकते हैं

$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$$

$$3^{-3} = \frac{1}{3^3}$$

जैसे— $\left(\frac{6}{7}\right)^3 = \frac{6^3}{7^3} = \frac{216}{343}$

और $\frac{216}{343} = \frac{6 \times 6 \times 6}{7 \times 7 \times 7} = \left(\frac{6}{7}\right)^3$

ध्यान दें, पृथक आधार किन्तु समान घातांक वाली संख्याओं के गुणन सूत्र $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ का उपयोग करके भी कुछ परिमेय संख्याओं को घातीय संकेतन (घात रूप) में व्यक्त कर सकते हैं, जैसे—

$$(27 \times 343) = 3^3 \times 7^3 = (3 \times 7)^3 = (21)^3$$

धनात्मक एवं ऋणात्मक घातांक :

घातांक (–1) का अर्थ :

देखिए, $3 \times \frac{1}{3} = 1$ या $3 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)}$

$5 \times \frac{1}{5} = 1,$ या $5 = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)}$

$\frac{3}{7} \times \frac{7}{3} = 1,$ या $\frac{3}{7} = \frac{1}{7/3}$

इसी प्रकार यदि a एक शून्येतर परिमेय संख्या हो, तो

$$a \times \frac{1}{a} = 1, \quad \text{या} \quad a = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)}$$

हम जानते हैं कि ऐसी परिमेय संख्याएँ जिनका गुणनफल 1 के बराबर होता है, एक दूसरे की गुणात्मक प्रतिलोम (Inverse) अथवा व्युत्क्रम (Reciprocal) कहलाती है। अतः उपर्युक्त उदाहरणों में 3 का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{3}$ तथा $\frac{1}{3}$ का गुणात्मक प्रतिलोम 3 होगा।

आप जानते हें कि $10^2 = 10 \times 10 = 100$

$$10^1 = \frac{10 \times 10}{10} = \frac{100}{10}$$

निष्कर्ष :

किसी शून्येतर परिमेय संख्या a के लिए $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ जहाँ m एक धनात्मक संख्या है।

a^{-m}, a^m का गुणात्मक प्रतिलोम है।

हम जानते हैं कि a के गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{a}$ को a^{-1} भी लिखा जाता है। इसे 'a की घात (-1)' अथवा 'a व्युत्क्रम पढ़ते हैं, इसी प्रकार 3 का गुणात्मक प्रतिलोम 3^{-1}, 9 का गुणात्मक प्रतिलोम 9^{-1} है तथा $\frac{4}{5}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}$ अथवा $\frac{5}{4}$ है।

अतः $\frac{1}{3} = 3^{-1}, \frac{1}{9} = 9^{-1}, \frac{5}{4} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-1}$

इसी प्रकार,

$$3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}, 9 = \left(\frac{1}{9}\right)^{-1}, \frac{4}{5} = \left(\frac{5}{4}\right)^{-1}.$$

पुनः देखिए,

$$5 \times \frac{1}{5} = 1$$

$\therefore \quad \frac{1}{5} = 5$ का व्युत्क्रम

$= (5)^{-1}$

अर्थात् $5 = \frac{1}{1/5}$

अर्थात् $\frac{1}{2^3} = (2^3)^{-1} = 2^{-3}$

व्यापक रूप में हम देखते हैं कि

$$a^{-n} \times a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$$

या $a^{-n} \times a^n = 1$

अतः $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ और $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

उपर्युक्त उदाहरणों से निष्कर्ष निकलता है कि—

1. किसी शून्येतर परिमेय संख्या की (-1) घात, उस संख्या के गुणात्मक प्रतिलोम (व्युत्क्रम) के बराबर होता है।
2. यदि a एक शून्येतर परिमेय संख्या हो तथा n कोई धन पूर्णांक हो तो a^n का गुणात्मक प्रतिलोम a^{-n} होता है और इसे 'a की घात $(-n)$ पढ़ते हैं।

टिप्पणी : 0^{-n} परिभाषित नहीं है क्योंकि $0^{-n} = \frac{1}{0^n}$

दायें पक्ष में भाजक $0^n = 0$ और हम जानते हैं कि 0 से भाग परिभाषित नहीं हैं।

विशेष : किसी भी संख्या को 1.0 और 10.0 के बीच की एक दशमलव संख्या (जिसमें 1.0 सम्मिलित है परन्तु 10.0 सम्मिलित नहीं है) और 10 की किसी घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। संख्या के इस रूप को उसका 'मानक रूप' या 'वैज्ञानिक संकेतन' कहते हैं।

इस प्रकार

मानक रूप या वैज्ञानिक संकेतन में व्यक्त संख्याएँ $k \times 10^n$ के रूप में लिखी जाती है जहाँ $1 \le k < 10$ तथा n एक पूर्णांक होता है और k एक दशमलव संख्या होती है।

मूल्यांकन :

1. $3^{-2} \times 3^5$ का मान होगा—

   (i) 3 (ii) 9 (iii) $\frac{1}{27}$ (iv) 27

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \times 2^2$ का मान होगा—

   (i) 2 (ii) 4 (iii) 8 (iv) 16

3. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$ का मान बताइये।

4. $\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^0 + \left(\frac{3}{5}\right)^1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2\right\} \div \left(\frac{7}{5}\right)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. $\left(\frac{7}{9}\right)^2 \div \left(\frac{14}{3}\right)^2$ को सरल कर मान ज्ञात कीजिए।

6. $8^{(5-5)}$ का मान बताइये।

7. $9^3 \div 27$ का मान बताइये।

6. $\left(\frac{6}{3}\right) \div 18$ का मान ज्ञात कीजिए।

———

इकाई-5
सरल व चक्रवृद्धि ब्याज की संकल्पना

इस इकाई के अध्ययनोपरांत हमें निम्नांकित की जानकारी प्राप्त होगी :

* साधारण ब्याज
* चक्रवृद्धि ब्याज

प्रशिक्षुओं से निम्नांकित प्रश्न हल करवायें—

एक गाँव में मोहन ने साहूकार से 100 रुपये उधार लिया तो उसे ` 5 हर महीने अतिरिक्त धन देना होता है। इस अतिरिक्त धन (` 5) का दूसरा नाम ब्याज है। यदि एक महीने में ` 100 पर ` 5 ब्याज देना पड़े तो

एक वर्ष में ` 100 पर ` 60 ब्याज देना होगा।

इसका अर्थ है कि ब्याज की वार्षिक दर 60% हुई।

यहाँ पर उधार लिया या उधार दिया गया रुपया 'मूलधन' कहलाता है।

अब मोहन को एक वर्ष के बाद ` 160 साहूकार को देना पड़ेगा। यही राशि मिश्रधन कहलाती है अर्थात्

$$\boxed{\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} + \text{ब्याज}}$$

या ब्याज = मिश्रधन − मूलधन

इस प्रकार हमें ब्याज के लिए निम्नांकित सूत्र प्राप्त होता है :

$$\boxed{\text{ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}}$$

उपर्युक्त सूत्र से प्राप्त ब्याज को 'साधारण ब्याज' कहते हैं।

साधारण ब्याज निम्नांकित तीन बातों पर निर्भर करता है—

1. कितना रुपया जमा किया या उधार लिया, अर्थात् मूलधन।
2. कितने समय के लिए रुपया जमा किया या उधार लिया, अर्थात् समय।
3. किस ब्याज दर पर रुपया जमा किया या उधार लिया, अर्थात् ब्याज दर।

प्रशिक्षुओं से उपर्युक्त प्रकार के अन्य प्रश्न उनसे स्वयं करवायें।

चक्रवृद्धि ब्याज : आज बाजार में ऋण वितरण कराने वाली कई संस्थाएँ हैं। ये संस्थाएँ उपभोक्ता से ब्याज पर भी ब्याज सहित अपने धन की वसूली करती हैं। यहाँ पर चक्रवृद्धि ब्याज के बारे में चर्चा करेंगे।

हम जानते हैं—

साधारण ब्याज ज्ञात करने में प्रतिवर्ष का ब्याज समान होता है।

meeOeejCe yÙeepe $= \dfrac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

जब कोई व्यक्ति किसी महाजन से निश्चित अवधि (जैसे 2 वर्ष) के लिए ब्याज की वार्षिक दर पर धन उधार लेता है और पहले वर्ष के अन्त में ब्याज न जमा करने पर पहले वर्ष के ब्याज को मूलधन में जोड़ देते हें, तो उस दशा में पहले वर्ष का जो मिश्रधन होता है, वह दूसरे वर्ष के लिए मूलधन हो जाता है और फिर इस नये मूलधन पर दूसरे वर्ष का ब्याज निकालते हैं, यह ब्याज दूसरे वर्ष के मूलधन में जोड़ने पर दूसरे वर्ष का मिश्रधन प्राप्त हो जाता है।

दूसरे वर्ष के मिश्रधन का पहले वर्ष के मूलधन से अन्तर ही चक्रवृद्धि ब्याज होता है।

आइये चक्रवृद्धि ब्याज की चर्चा करते हैं।

` 500 का 10% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज और मिश्रधन सारणी को देखते हुए ज्ञात करें।

मूलधन (रुपये)	दर (% वार्षिक)	समय (वर्ष)	ब्याज (` में)	मिश्रधन
500	10	पहले वर्ष	50	550
550	10	दूसरे वर्ष	55	605

यहाँ पर,

2 वर्ष के बाद चक्रवृद्धि ब्याज = ` 605 – ` 500

= ` 105

हम देखते हैं कि 2 वर्ष का साधारण ब्याज

$= \dfrac{500 \times 10 \times 2}{100}$

= ` t100

चक्रवृद्धि ब्याज का मान ` 105 आया है।

2 वर्ष का साधारण ब्याज ` 100 आया है।

दोनों ब्याजों का अन्तर = ` 105 – ` 100 = ` 5

यह ब्याज प्रथम वर्ष के ब्याज ` 50 का ब्याज है।

ब्याज पर ब्याज की गणना करने पर ब्याज $= \dfrac{50 \times 10 \times 1}{100}$

= ` 5

आप देखेंगे कि दूसरे वर्ष के ब्याज की गणना में पहले वर्ष के ब्याज पर भी ब्याज की गणना की गयी। अतः ब्याज की इस प्रणाली को 'ब्याज पर ब्याज' या 'चक्रवृद्धि ब्याज' कहते हैं तथा इस प्रकार प्राप्त मिश्रधन को 'चक्रवृद्धि मिश्रधन' कहते हैं।

उपर्युक्त से निम्नांकित निष्कर्ष पर पहुँचते हैं—

1. समान धन, समान समय और समान वार्षिक दर होने पर 1 वर्ष के लिए चक्रवृद्धि ब्याज का मान, साधारण ब्याज के बराबर होता है।
2. चक्रवृद्धि ब्याज की गणना में पहले वर्ष का मिश्रधन, दूसरे वर्ष का मूलधन होता है।
3. चक्रवृद्धि ब्याज = चक्रवृद्धि मिश्रधन – मूलधन

चक्रवृद्धि मिश्रधन एवं चक्रवृद्धि ब्याज के लिये सूत्र प्राप्त करना :

` 200 का 7% वार्षिक दर से चार वर्ष बाद चक्रवृद्धि मिश्रधन निम्नांकित चरणों द्वारा प्राप्त किया जायेगा।

(a) एक वर्ष बाद ब्याज = ` $\dfrac{200 \times 7}{100}$ = ` 14

एक वर्ष बाद मिश्रधन = ` $(200 + 14)$ = ` 214

अतः एक वर्ष बाद मूलधन $= \dfrac{\text{` } 214}{\text{` } 200} = 1.07$ गुना (` 200) बढ़ गया।

अर्थात एक वर्ष पश्चात् 1.07 गुना बढ़ गया।

अर्थात एक वर्ष पश्चात मिश्रधन = ` 200 × 1.07

= ` 200 (1 + .07)

= ` $200\left(1 + \dfrac{7}{100}\right)$

= ` 214

(b) जब दूसरे वर्ष का ब्याज ज्ञात किया जायेगा तब मूलधन ` 214 अर्थात् ` $200\left(1 + \dfrac{7}{100}\right)$ होगा।

दूसरे वर्ष का ब्याज (चक्रवृद्धि ब्याज) $= ₹\ \dfrac{200\left(1+\frac{7}{100}\right)\times 7}{100} = ₹\ 200\left(1+\frac{7}{100}\right)\times\frac{7}{100}$

दो वर्ष बाद मिश्रधन (चक्रवृद्धि मिश्रधन) $= ₹\ 200\left(1+\frac{7}{100}\right) + ₹\ 200\left(1+\frac{7}{100}\right)\times\frac{7}{100}$

$$= ₹\ 200\left(1+\frac{7}{100}\right)\left[1+\frac{7}{100}\right]$$

$$= ₹\ 200\left(1+\frac{7}{100}\right)^2$$

अतः दो वर्ष पश्चात् मूलधन (₹ 200) बढ़ गया $= \dfrac{₹\ 200\left(1+\frac{7}{100}\right)^2}{₹\ 200}$

$$= \left(1+\frac{7}{100}\right)^2$$

अर्थात् दो वर्ष पश्चात् मिश्रधन $= 200\left(1+\frac{7}{100}\right)^2$

(c) तीसरे वर्ष के लिये मूलधन $= ₹\ 200\left(1+\frac{7}{100}\right)^2$ होगा।

तीन वर्ष बाद ब्याज $= ₹\ \dfrac{200\left(1+\frac{7}{100}\right)^2\times 7}{100}$

$$= ₹\ 200\left(1+\frac{7}{100}\right)^2\times\frac{7}{100}$$

तीन वर्ष बाद मिश्रधन (चक्रवृद्धि मिश्रधन) $= ₹\ 200\left(1+\frac{7}{100}\right)^2 + ₹\ 200\left(1+\frac{7}{100}\right)^2\frac{7}{100}$

$$= ₹\ 200\left(1+\frac{7}{100}\right)^2\left[1+\frac{7}{10}\right]$$

$$= ₹\ 200\left(1+\frac{7}{100}\right)^3$$

इसी प्रकार चार वर्ष पश्चात् चक्रवृद्धि मिश्रधन $= ` 200\left(1+\frac{7}{100}\right)^4$

उपर्युक्त चरणों से प्राप्त चक्रवृद्धि मिश्रधन के लिये प्राप्त सूत्र (formula) को निम्नांकित प्रकार से प्रदर्शित करते हैं।

चक्रवृद्धि मिश्रधन = मूलधन $\left(1+\frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}}$

1. यदि चक्रवृद्धि मिश्रधन (Compound Amount) = A

मूलधन (Principle Amount) = P

समय (time) = n

दर (Rate) = r ब्याज की दर = r

अतः $\boxed{A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}$

n वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज = चक्रवृद्धि मिश्रधन − मूलधन

$$= P\left\{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - 1\right\}$$

मूल्यांकन :

1. ` 400, 3 वर्ष के लिए 6% वार्षिक ब्याज की दर से उधार दिया गया। ब्याज होगा—
   (i) ` 70 (ii) ` 72 (iii) ` 40 (iv) ` 82
2. ` 500 का 3 वर्ष का किस ब्याज की वार्षिक दर पर उसका साधारण ब्याज A हो जाता है।
   (i) 10% (ii) 12% (iii) 15% (iv) 20%
3. 6% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का मिश्रधन ` 560 है। मूलधन है—
   (i) ` 400 (ii) ` 500 (iii) ` 600 (iv) ` 450
4. किस वार्षिक ब्याज की दर से 10 वर्ष में किसी धन का मिश्रधन तीन गुना हो जाएगा—

(i) ` 15 (ii) ` 20 (iii) ` 25 (iv) ` 18

5. वार्षिक ब्याज दर ज्ञात कीजिए यदि मूलधन ` 100 समय 1 वर्ष और मिश्रधन ` 107 हो।

6. किस वार्षिक साधारण ब्याज की दर से 20 वर्षों में किसी धन का मिश्रधन चार गुना हो जाएगा?

7. एक किसान ने ` 2,400, 12% वार्षिक ब्याज की दर से उधार लिया। उसने $2\frac{1}{2}$ वर्ष बाद ` 1,200 तथा एक गाय देकर उधार चुका दिया। गाय का मूल्य ज्ञात कीजिए।

8. करीम बाग लगाने के लिए बैंक से ` 15000 का ऋण लेता है। बैंक पौधों की खरीद के लिए ऋण का 20% छूट देने के बाद शेष धनराशि पर 9% वार्षिक साधारण ब्याज लेता है। 4 वर्ष बाद करीम पूरा ऋण अदा करने के लिए बैंक को कितना धन देगा?

———

इकाई-6
सरल ब्याज, सूत्र तथा चक्रवृद्धि मिश्रधन का सूत्र एवं अनुप्रयोग

इस इकाई को पढ़ने से आप को निम्नलिखित की जानकारी होगी।

- सरल ब्याज
- सरल ब्याज का सूत्र
- चक्रवृद्धि मिश्रधन का सूत्र एवं अनुप्रयोग

प्रायः यह देखने में आता है कि किसी भी व्यक्ति का व्यावहारिक जीवन में उधार के लेन-देन के बिना कार्य करना बहुत कठिन होता है उधार लेन-देन की प्रक्रिया बैंकों, सहकारी समितियों या किसी व्यक्ति द्वारा की जाती है क्या आप जानते हैं कि उधार के लेन-देन में कुछ शर्त होती हैं? आपको ज्ञात होना चाहिए कि उधार देने वाला व्यक्ति उधार लेने वाले के सामने कुछ शर्त रखता है। जिसके अन्तर्गत उधार देने वाला व्यक्ति उधार लेने वाले से वार्षिक या मासिक की दर से प्रति रुपये 100.00 पर कुछ रुपया अधिक लेता है। जब कोई व्यक्ति जितनी धनराशि उधार देता है, वह मूलधन कहलाता है शर्त की अवधि पूर्ण होने पर जो धन चुकता करता है वह मिश्रधन कहलाता है और मूलधन से अधिक दिया गया धन ब्याज कहलाता है।

सरल ब्याज—जमा की गई अथवा उधार ली गई धनराशियों से जो अधिक धन दिया जाता है या लिया जाता है उसे ब्याज कहते है। एक निश्चित मूलधन पर जब प्रत्येक अवधि का ब्याज समान होता है तो उसे साधारण ब्याज या सरल ब्याज कहते है।

सरल ब्याज का सूत्र—किसी धन का ब्याज हम ऐकिक नियम द्वारा निकाल सकते है परन्तु सरल ब्याज को निकालने की दूसरी विधि सूत्र का प्रयोग करके सरल ब्याज निकाला जाता है सरल ब्याज निकालने का सूत्र निम्नलिखित है।

$$\text{सरल ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

जमा की गई धनराशि अथवा उधार ली गई धनराशि को मूलधन कहते हैं।

जिस निश्चित अवधि के लिए धन जमा रहता है या उधार या ऋण रहता है उस अवधि को समय कहते हैं।

100 रुपये के मूलधन पर एक वर्ष के लिए प्राप्त ब्याज को ब्याज दर कहते हैं ब्याज दर को % (प्रतिशत) के रूप में व्यक्ति करते हैं।

ब्याज दर को केवल दर भी लिखकर प्रयोग करते है।

ब्याज की दरें प्रतिशत तिमाही प्रतिशत छमाही अथवा प्रति रुपया प्रति मास के रूप में भी प्रयुक्त होती है।

उदाहरण :

रुपया 500 के लिए 4% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का साधारण ब्याज बताइए।

हल :

मूल धन = 500 रुपये

समय = 2 वर्ष

वार्षिक ब्याज की दर = 4%

प्रथम विधि

100 रुपये पर 1 वर्ष का ब्याज = 4 रुपये

1 रुपये पर 1 वर्ष का ब्याज $= \frac{4}{100}$ रुपये

500 रुपये पर 1 वर्ष का ब्याज $= \frac{500 \times 4}{100}$ रुपये

500 रुपये पर 2 वर्ष का ब्याज $= \frac{500 \times 4 \times 2}{100}$

अतः साधारण ब्याज = 40 रुपये

द्वितीय विधि

1 वर्ष का साधारण ब्याज = 500 रुपये का 4%

$= \frac{500 \times 4}{100} = 20$ रुपये

2 वर्ष का साधारण ब्याज = 20×2 = 40 रुपये

चक्रवृद्धि मिश्रधन का सूत्र एवं अनुप्रयोग

हम साधारण ब्याज के बारे में जानकारी एवं साधारण ब्याज के सूत्र का प्रयोग कर साधारण ब्याज निकालना सीख चुके है अब हम चक्रवृद्धि ब्याज के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगें।

चक्रवृद्धि मिश्रधन—मूलधन पर मिले ब्याज को यदि मूलधन में जोड़ दिया जाए तो वह मिश्रधन कहलाता है।

चक्रवृद्धि मिश्रधन का सूत्र—

$$\text{चक्रवृद्धि मिश्रधन} = \text{मूलधन} \left(1+\frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}}$$

उदाहरण 1. किस साधारण ब्याज की दर से 20 वर्षों में किसी धन का मिश्रधन चार गुना हो जायेगा?

हल—माना कि मूलधन = ` 100 है

मिश्रधन =मूलधन का चार गुना = ` 400

ब्याज = 400 – 100 = ` 300

∵ ` 100 पर 20 वर्ष का ब्याज = ` 300

∴ ` 100 पर 1 वर्ष का ब्याज $= \frac{300}{20}$

= ` 15

अतः वार्षिक ब्याज दर = 15% **उत्तर**

उदाहरण 2. 6% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का मिश्रधन 560 रुपये है तो मूलधन बताइए।

हल— ∵ ` 100 पर 1 वर्ष का ब्याज = ` 6

∴ ` 100 पर 2 वर्ष का ब्याज = 2 × 6 = ` 12

मिश्रधन = ` 100 + ` 12 = ` 112

∵ ` 112 मिश्रधन हैं तो मूलधन = ` 100

∴ ` 1 मिश्रधन है तो मूलधन = ` $\frac{100}{12}$

` 560 मिश्रधन है तो मूलधन = ` $\frac{100 \times 560}{112} = 500$ **उत्तर**

उदाहरण 3. ` 100 का 10% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्षों के चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज का कितना अन्तर होगा।

हल— मूलधन = ` 100

दर = 10% वार्षिक

समय = 2 वर्ष

साधारण ब्याज $= \dfrac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$

$= \dfrac{100 \times 10 \times 2}{100}$

= ` 20

चक्रवृद्धि ब्याज $= \text{मूलधन} \times \left[\left\{ 1 + \dfrac{\text{दर}}{100} \right\}^{\text{समय}} - 1 \right]$

$= 100 \times \left[\left\{ 1 + \dfrac{10}{100} \right\}^{2} - 1 \right]$

$= 100 \times \left[\left\{ 1 + \dfrac{1}{10} \right\}^{2} - 1 \right]$

$= 100 \times \left[\left\{ \dfrac{11}{10} \right\}^{2} - 1 \right]$

$= 100 \times \left[\dfrac{11}{10} \times \dfrac{11}{10} - 1 \right]$

$= 100 \times \left[\dfrac{121}{100} - 1 \right]$

$= 100 \times \left[\dfrac{121 - 100}{100} \right]$

= ` 21

चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज में अन्तर = 21 – 20 = ` 1 **उत्तर**

उदाहरण 4.किस धन का 10% वार्षिक ब्याज की दर से एक वर्ष का साधारण ब्याज ` 1000 है।

हल— दर = 10% वार्षिक

समय = 1 वर्ष

साधारण ब्याज = ` 1000

साधारण ब्याज $= \dfrac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$

$$\text{मूलधन} = \frac{\text{साधारण ब्याज} \times 100}{\text{दर} \times \text{समय}}$$

$$= \frac{1000 \times 100}{10 \times 1}$$

$$= ` \ 10000$$

अतः मूलधन = ` 10000 है। **उत्तर**

उदाहरण 5. ` 500 का 10% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

हल— मूलधन = ` 500

दर = 10% वार्षिक

समय = 2 वर्ष

$$\text{चक्रवृद्धि} = \text{मूलधन} \times \left\{1 + \frac{\text{दर}}{100}\right\}^{\text{समय}}$$

$$= 500 \times \left\{1 + \frac{10}{100}\right\}^2$$

$$= 500 \times \left\{1 + \frac{1}{10}\right\}^2$$

$$= 500 \times \left\{\frac{11}{10}\right\}^2$$

$$= 500 \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10}$$

$$= 5 \times 121$$

$$= ` \ 605$$ **उत्तर**

उदाहरण 6. ` 200 का 2 वर्ष का 10% वार्षिक ब्याज की दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल— मूलधन = ` 200

दर = 10% वार्षिक

समय = 2 वर्ष

$$\text{चक्रवृद्धि मिश्रधन} = \text{मूलधन} \times \left[\left\{1 + \frac{\text{दर}}{100}\right\}^{\text{समय}} - 1\right]$$

$$= 200 \times \left[\left\{1+\frac{10}{100}\right\}^2 - 1\right]$$

$$= 200 \times \left[\left\{1+\frac{1}{10}\right\}^2 - 1\right]$$

$$= 200 \times \left[\left\{\frac{11}{10}\right\}^2 - 1\right]$$

$$= 200 \times \left[\frac{121}{100} - 1\right]$$

$$= 200 \times \left[\frac{121-100}{100}\right]$$

$$= 200 \times \frac{21}{100}$$

$$= 2 \times 21$$

= ` 42 **उत्तर**

उदाहरण 7. ज्ञात कीजिए कि किस धन का 2 वर्ष में 4% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से मिश्रधन ` 676 हो जायेगा।

हल— दर = 4% वार्षिक

समय = 2 वर्ष

मिश्रधन = ` 676

माना कि अभीष्ट धन अर्थात् मूलधन ` P है।

$$\text{चक्रवृद्धि मिश्रधन} = \text{मूलधन} \times \left[1+\frac{\text{दर}}{100}\right]^{\text{समय}}$$

$$676 = P \times \left[1+\frac{4}{100}\right]^2$$

$$676 = P \times \left[1+\frac{1}{25}\right]^2$$

$$676 = P \times \left[\frac{25+1}{25}\right]^2$$

$$676 = P \times \left[\frac{26}{25}\right]^2$$

$$676 = P \times \frac{676}{625}$$

$$P = \frac{676 \times 625}{676}$$
$$P = 625$$

अतः अभीष्ट धन P = ` 625 **उत्तर**

उदाहरण 8. ज्ञात कीजिए कि कितने प्रतिशत वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से ` 400 का 2 वर्ष में मिश्रधन 441 रुपया हो जायेगा?

हल— मूलधन = ` 400

मिश्रधन = ` 441

समय = 2 वर्ष

माना कि चक्रवृद्धि ब्याज की दर $R\%$ वार्षिक है।

$$\text{चक्रवृद्धि मिश्रधन} = \text{मूलधन} \times \left\{1 + \frac{\text{दर}}{100}\right\}^{\text{समय}}$$

$$441 = 400 \times \left\{1 + \frac{R}{100}\right\}^2$$
$$\frac{441}{400} = \left\{1 + \frac{R}{100}\right\}^2$$
$$\left\{\frac{21}{20}\right\}^2 = \left\{1 + \frac{R}{100}\right\}^2$$
$$\frac{21}{20} = 1 + \frac{R}{100}$$
$$\frac{21}{20} - 1 = \frac{R}{100}$$
$$\frac{1}{20} = \frac{R}{100}$$
$$R = 5$$

अतः चक्रवृद्धि ब्याज की दर = 5% है। **उत्तर**

उदाहरण 9. एक नगर की जनसंख्या प्रतिवर्ष 10% बढ़ जाती है। यदि इस समय नगर की जनसंख्या 140000 है, तो 3 वर्ष बाद नगर की जनसंख्या ज्ञात कीजिए।

हल— नगर की वर्तमान जनसंख्या = 140000

नगर की जनसंख्या में वृद्धि की दर = 10% वार्षिक

समय = 3 वर्ष

अतः 3 वर्ष बाद नगर की जनसंख्या = नगर की वर्तमान जनसंख्या $\times\left\{1+\frac{\text{वृद्धि की दर}}{100}\right\}^{\text{समय}}$

$$=140000\times\left\{1+\frac{10}{100}\right\}^3$$
$$=140000\times\left\{1+\frac{1}{10}\right\}^3$$
$$=140000\times\left\{\frac{11}{10}\right\}^3$$
$$=140000\times\frac{11}{10}\times\frac{11}{10}\times\frac{11}{10}$$
$$=140\times1331$$
$$=186340$$

अतः 3 वर्ष बाद नगर की जनसंख्या = 186340 **उत्तर**

उदाहरण 10. एक नगर की जनसंख्या में प्रतिवर्ष 5% कमी हो जाती है। यदि नगर की वर्तमान जनसंख्या 3610 है, तो 2 वर्ष पूर्व नगर की जनसंख्या ज्ञात कीजिए।

हल— नगर की वर्तमान जनसंख्या = 3610

नगर की जनसंख्या में कमी की दर = 5% वार्षिक

समय = 2 वर्ष

माना 2 वर्ष पूर्व नगर की जनसंख्या x थी।

नगर की वर्तमान जनसंख्या = 2 वर्ष पूर्व नगर की जनसंख्या $\times\left[1-\frac{\text{कमी की दर}}{100}\right]^{\text{समय}}$

$$3600=x\times\left\{1-\frac{5}{100}\right\}^2$$
$$3610=x\times\left\{1-\frac{1}{0}\right\}^2$$
$$3610=x\times\left\{\frac{19}{20}\right\}^2$$
$$3610=x\times\frac{19}{20}\times\frac{19}{20}$$
$$x=\frac{3610\times20\times20}{19\times19}$$
$$=10\times20\times20$$
$$=4000$$

अतः 2 वर्ष पूर्व नगर की जनसंख्या = 4000 **उत्तर**

उदाहरण 11. एक गाँव की जनसंख्या प्रतिवर्ष 5% की दर से कम हो रही है। यदि गाँव की वर्तमान जनसंख्या 3610 हो, तो 2 वर्ष पूर्व की जनसंख्या बताइए।

हल— गाँव की वर्तमान जनसंख्या $A = 3610$

प्रतिवर्ष कमी की दर $r\% = 5\%$

समय $(n) = 2$ वर्ष

मान लिया 2 वर्ष पूर्व की जनसंख्या $= P$

$$A = P\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$$

या, $$3610 = P\left(1 - \frac{5}{100}\right)^2 = P\left(\frac{19}{20}\right)^2$$

या, $$P \times \frac{19}{20} \times \frac{19}{20} = 3610$$

या, $$P = \frac{3610 \times 20 \times 20}{19 \times 19} = 10 \times 20 \times 20 = 4000$$

अतः 2 वर्ष पूर्व की गाँव की जनसंख्या 4000 थी। **उत्तर**

वैकल्पिक विधि :

गाँव की वर्तमान जनसंख्या $P = 3610$

प्रतिवर्ष कमी की दर $= r\%$

अर्थात् वृद्धि की दर $= -r\%$

प्रश्नानुसार, $-r\% = 5\%$

अतः $r = -5$

समय 2 वर्ष पूर्व अर्थात् $n = -2$

अतः यदि 2 वर्ष पूर्व की जनसंख्या A हो, तो

$$\begin{aligned}
A &= P\left(1-\frac{r}{100}\right)^{n} \\
&= P\left(1-\frac{5}{100}\right)^{-2} \\
&= 3610\left(1-\frac{5}{100}\right)^{-2} \\
&= \frac{3610}{\left(1-\frac{5}{100}\right)^{2}} \\
&= \frac{3610}{\frac{95}{100}\times\frac{95}{100}} \\
&= \frac{3610\times 100\times 100}{95\times 95} \\
&= 2\times 100\times 20 \\
&= 40\times 400 \\
&= 4000
\end{aligned}$$

अतः 2 वर्ष पूर्व की जनसंख्या 4000 थी। **उत्तर**

मूल्यांकन :

1. 100 रुपये पर 2 वर्ष का 3% वार्षिक ब्याज की दर से साधारण ब्याज कितना होगा।
2. 400 रुपये पर 3 वर्ष का वार्षिक ब्याज की दर से ब्याज तथा मिश्रधन ज्ञात कीजिए।
3. 7200 रुपये का 3 वर्ष का ब्याज 1080 रुपये है ब्याज की दर बताइए।
4. 10% वार्षिक ब्याज की दर से कितने समय 200 रुपये का तीन गुना हो जायेगा।
5. 400 रुपये का 5% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।
6. 500 रुपये का 4% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष के चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज के अन्तर ज्ञात कीजिए।

———

इकाई-7

बैंक की जानकारी, बैंक में खाता खोलना तथा खातों के प्रकार

इस इकाई को पढ़ने से आप को निम्नलिखित की जानकारी होगी

- बैंक की जानकारी
- बैंक में खाता खोलना
- खातों के प्रकार

आज हम प्रगतिशील युग से गुजर रहे हैं। चारों ओर से समग्र विकास का आह्वान हो रहा है। इस विकास की आधारशिलायें अनेक हैं उन्हीं में बैंकिंग भी एक है। आइए, विचार करें, बैंक की आवश्यकता क्यों पड़ी?

समाज में ऐसे भी लोग हैं जिनके पास आवश्यकता से अधिक धन है। जब बैंकों की कमी थी, लोग कम पढ़े लिखे थे, अपने अतिरिक्त धन को जमीन में गाड़ कर, नींव में छिपाकर, सोना-चाँदी खरीद कर सुरक्षित समझते थे फिर भी वे निश्चित और निर्भय नहीं थे। बैंकों के प्रादुर्भाव से यही पैसा बैंकों में जमा किया जाने लगा जो राष्ट्र के अनेक विकास कार्यों, जरूरतमंद लोगों को ऋण देने आदि में व्यय किया जाने लगा और इसके बदले में जमाकर्त्ता को कुछ धन ब्याज के रूप में दिया जाने लगा। सारांश यह कि जो धन अचल था चल में बदल गया।

व्यापारिक दृष्टिकोण से बैंकों की उपादेयता, महत्ता दिन-प्रतिदिन बढ़ती जा रही है। व्यापारी, बैंक में बड़ी-बड़ी धनराशि जमा करते हैं, निकालते हैं और व्यापार में लगाते हैं। बैंक की वर्तमान कार्य प्रणाली से बैंक का हर ग्राहक अपने को सुरक्षित तथा भयरहित समझ रहा है।

बैंक धन जमा करने, धन उधार देने वाली संस्था के रूप में कार्य करते हैं। वेतन, पेंशन का भी भुगतान बैंक के खाते के माध्यम से होने लगा है। यही नहीं, शिक्षा संस्थानों की शुल्क से आय, वृद्धावस्था पेंशन, आवास ऋण सहायता आदि का भी आहरण-वितरण बैंकों के माध्यम से होने लगा है।

बीमा निगम भी एक संस्था है जहाँ धन का आहरण-वितरण होता है।

उपर्युक्त के अतिरिक्त विनिमय पत्र, बचत पत्र, ऋण पत्र, यात्री चेकों का निर्गमन भी बैंक से होता है। आप देखेंगे कि बड़े-बड़े नगरों में एक ही बैंक की कई शाखायें अलग-अलग स्थानों पर स्थापित हैं तथा भिन्न-भिन्न बैंक भी पर्याप्त संख्या में हैं।

आप बैंक की उपयोगिता समझ गए होंगे। हम यहाँ बैंक की कार्य प्रणाली का अध्ययन करेंगे। विभिन्न चेकों, शेयर, ऋण पत्र, शेयर एवं ऋण पत्र में अन्तर, निवेश, अंकित मूल्य, बाजार मूल्य, दलाली आदि का व्यावहारिक ज्ञान प्राप्त करेंगे।

बैंक की जानकारी

आइए, बैंक की कार्य प्रणाली का अध्ययन करें।

- हम बैंक किस उद्देश्य से जाते हैं?

  धन जमा करने, उधार लेने, धन आहरण करने के लिए।
- हम धन को बैंक में क्यों जमा करते हैं?

  धन को सुरक्षित रखने के लिए और ब्याज पाने के लिए।
- बैंक में क्या-क्या कार्य होते हैं?

बैंक व्यापारियों को व्यापार प्रारम्भ करने के लिए, छोटे किसानों को कृषि के लिए और बेरोजगारों को धन्धा शुरू करने के लिए ऋण देता है।

बैंक खाताधारियों और सरकार के लिए भी कार्य करता है जैसे—स्कूलों की फीस जमा करना, पानी और बिजली के बिल जमा करना, करों का भुगतान, मकान के लिए ऋण की किश्तें जमा करना, वेतन वितरण की सुविधा प्रदान करना आदि।

बैंक में खाता खोलना

जब हम बैंक में पहली बार धन जमा करते हैं तो हमें बैंक में एक खाता खोलना पड़ता है। इसके लिए हमें बैंक से प्राप्त निर्धारित प्रार्थना-पत्र पर अन्य सूचनाओं के साथ नमूने के तीन हस्ताक्षर करके बैंक में आवेदन करना होता है। खाता खोलने के लिए हमें एक परिचयदाता की आवश्यकता होती है जिसका खाता उसी बैंक में पहले से खुला होता है। परिचयदाता प्रार्थना-पत्र में निर्धारित स्थान पर अपना हस्ताक्षर करके अपनी खाता संख्या लिखता है और प्रमाणित करता है कि वह खाता खोलने वाले को कितने दिनों से जानता है।

शिक्षक कक्षा में बैंक के सभी वास्तविक फार्म दिखाएं।

बैंक खाता खोलने वालों को एक पास बुक जारी करता है जिसमें तिथि अनुसार जमा की गई तथा निकाली गयी राशियों का विवरण लिखा जाता है।

जब हम बैंक में अपने खाते से धन निकालते हैं तो हमें एक फार्म भरना पड़ता है जिसे आहरण फार्म कहते हैं। बैंक अधिकारी आहरण फार्म में किये गये हस्ताक्षर को नमूने के हस्ताक्षर से मिलान

करके ही धन निकालने की अनुमति देता है। यदि हस्ताक्षर नही मिलते तो बैंक रुपये देने से इन्कार कर देता है।

खाता के प्रकार

बैंक में हम कई तरह के खाते खोल सकते हैं, जिनमें से कुछ प्रमुख खाते निम्नवत् हैं—

(i) बचत खाता (Savings Bank Account)

(ii) चालू खाता (Current Account)

(iii) सावधि जमा खाता (Fixed Deposit Accout)

(iv) आवर्ती (संचयी) जमा खाता (Recuring Deposit Account)

(v) अल्पवयस्क का खाता (Minor Account)

(vi) बैंक माँग पत्र (Bank demand draft)

(vii) मूल्यवान वस्तुओं की सुरक्षा के लिए लॉकर (Locker)

(i) बचतखाता—इस खाते का मुख्य उद्देश्य, कम और मध्यम आय वर्ग के लोगों के लिए बचत की भावना को प्रोत्साहित करना है। यह खाता बैंक द्वारा निर्धारित न्यूनतम धनराशि 500 रुपये जमा करके खोला जा सकता है। हम अपने बचत खाते से धन निकालने के लिए आहरण फार्म (Withdrawl form) या चेक भरकर धन निकाल सकते हैं। खाते में न्यूनतम धनराशि 1000 रुपये रखने पर जमाकर्ता को बैंक से चेक बुक भी प्राप्त हो सकती है।

(ii) चालू खाता—बड़े व्यापारी, कंपनियाँ, निगम और संस्थाएँ नगद लेनदेन नहीं करते हैं। वे चेक द्वारा ही लेनदेन करते हैं। इसलिए वे बैंक में अपना चालू खाता खोलते हैं। इस खाते में बैंक जमा धनराशि पर कोई ब्याज नहीं देता है, परन्तु इसमें बचत खाते की अपेक्षा धन को कई बार निकाल या जमा किया जा सकता है। कभी-कभी बैंक खाताधारी से नाममात्र की फीस लेता है। वर्तमान में चालू खाता खोलने पर एक वर्ष में भारतीय स्टेट बैंक द्वारा 50 रुपये सेवाशुल्क भी (सर्विस चार्ज के रूप में) लिया जाता है।

(iii) सावधि जमा खाता—इसमें धन निश्चित अवधि के लिए जमा किया जाता है। बैंक खाताधारी को प्रमाण-पत्र प्रदान करता है। इस प्रमाण-पत्र पर राशि, समय, ब्याजदर, ब्याज के अदायगी की विधि और जमा का प्रकार आदि लिखा रहता है। खाताधारी अवधि की समाप्ति पर धन निकालता है। फिर भी खाताधारी की आवश्यकता पर परिपक्वता की अवधि के पूर्व भी ब्याज दर में कटौतीकर भुगतान किया जा सकता है। सावधि जमा में ब्याज दर बचत खाते की अपेक्षा अधिक होती है। इसमें ब्याज वार्षिक, छमाही या तिमाही परिकलित किया जाता है।

ध्यान दें—उपर्युक्त ब्याज दर परिवर्तनीय है। समय-समय पर बैंक के निर्देशानुसार ब्याज दर में परिवर्तन होता रहता है।

(iv) आवर्ती या संचयी जमा खाता—इसमें एक निश्चित धन (जो 5 रुपये या 10 रुपये के गुणांक के रूप में होना चाहिए) प्रतिमाह निश्चित अवधि (जो कम से कम 12 माह, अधिक से अधिक 10 वर्ष) तक जमा करना होता है। इस खाते में ब्याज की दरें बचत खाते की दर की अपेक्षा अधिक होती हैं। यह योजना उन व्यक्तियों के लिए उपयोगी हैं जो नियमित रूप से अल्प धनराशि बचाना चाहते हैं। आवर्ती जमा योजना डाकघरों में भी संचालित है और इनकी ब्याज की दरें बैंक की ब्याज दरों से अधिक होती हैं।

(v) अल्पवयस्क का खाता—18 वर्ष की आयु से कम आयु वाला व्यक्ति अल्पवयस्क कहलाता है। अल्पवयस्क व्यक्ति को भी बैंक में खाता खोलने का अधिकार है। वह चालू खाता खोलने का अधिकारी नहीं होता। अल्पवयस्क व्यक्ति या तो अपने नाम से खाता खोल सकता है या अपने और अपने अभिभावक के संयुक्त नाम से। अल्पवयस्क की आयु कम से कम 12 वर्ष होना आवश्यक है। 12 वर्ष से कम की स्थिति में केवल अभिभावक ही खाता खोल सकता है।

(vi) बैंक ड्राफ्ट—डाकघरों से पत्रों की भाँति धन भी एक स्थान से दूसरे स्थान को 'मनीऑर्डर' पत्र के माध्यम से भेजा जाता है। इसी प्रकार बैंक भी धन स्थानान्तरण के लिए 'बैंक माँग पत्र' (Demand Draft) या बैंक ड्राफ्ट (Bank Draft) निर्गत करते हैं। बैंक ड्राफ्ट बैंक की एक शाखा का अपनी ही किसी अन्य शाखा के नाम एक आज्ञा के रूप में होता है जिसमें एक नियत राशि उस व्यक्ति को दिए जाने का आदेश होता है जिसके नाम ड्राफ्ट निर्गत किया गया है। धन भेजने वाला व्यक्ति एक निर्दिष्ट राशि बैंक को दे कर ड्राफ्ट बनवाता है। बैंक धन पाकर ड्राफ्ट निर्गत करता है। ड्राफ्ट में अधिकृत व्यक्ति अर्थात् जिसका नाम बैंक ड्राफ्ट में उल्लिखित हो बैंक की निर्दिष्ट शाखा में ड्राफ्ट प्रस्तुत करता है। साथ ही अपने खाते में डाल देता है। उसका भुगतान उसी के खाते के माध्यम से किया जाता है। ध्यान रहे ड्राफ्ट निर्गत करने वाली शाखा, स्थानान्तरिक होने वाली धनराशि पर बैंक के नियम के अनुसार कुछ कमीशन लेती है।

(vii) मूल्यवान वस्तुओं की सुरक्षा (लॉकर)—बैंक जहाँ धन संबंधी कार्य करते हैं वहीं कीमती वस्तुओं, आभूषणों, दस्तावेजों की सुरक्षा के लिए भी व्यवस्था करते हैं। इस कार्य के लिए बैंक के पास अतिसुदृढ़, कक्ष होते हैं जिनमें लॉकर की व्यवस्था होती है। निर्दिष्ट किराया दे कर कोई व्यक्ति बैंक के स्ट्रांग रूप में रखी आलमारी में एक लॉकर किराये पर ले सकता है। लॉकर 2 कुंजियों (चाबियों) के लगाने पर खुलता बन्द होता है। एक चाभी लॉकर किराये पर लेने वाले को दी जाती है और दूसरी चाभी जिसे मास्टर की कहते हैं, बैंक में रख ली जाती है। बैंक के लॉकर में रखी वस्तुओं की जानकारी बैंक वालों को भी नहीं हो पाती है। लॉकर खोलने के लिए बैंक का कर्मचारी मास्टर

की लगा कर एक ताले को खोल कर अलग हट जाता है और वह व्यक्ति अपनी चाबी लगा कर लॉकर को खोल लेता है।

धन निकालने की विधियाँ

(1) निकासी (आहरण) फार्म द्वारा

(2) चेक द्वारा

आहरण फार्म बैंक से निःशुल्क मिलता है। ग्राहक फार्म को भली-भाँति भरकर बैंक में पासबुक सहित प्रस्तुत करता है। अधिकारी हस्ताक्षर सहित अन्य तथ्यों की मिलान जाँच करते हैं। उपयुक्त पाये जाने पर धन ग्राहक को दे दिया जाता है।

आहरण प्रपत्र की तरह चेक भी बैंक द्वारा निर्गत एक छपी हुई पर्ची के रूप में होता है। चेकों पर एक संख्या पड़ी होती है तथा यह ग्राहक को 10,20,25 या 100 चेकों की पुस्तिका के रूप में दी जाती है। बैंक चेकबुक के लिए ग्राहक से नकद मूल्य प्राप्त करती है नकद न मिलने पर खाते से चेकबुक के मूल्य की धनराशि काट ली जाती है।

चेक

बैंकों ने अपनी कार्य प्रणाली को सुदृढ़ करने हेतु जमाकर्ताओं को धन निकालने या भुगतान करने हेतु चेक की सुविधा प्रदान की है। **चेक एक शर्त रहित आज्ञापत्र है जो सम्बन्धित खाते से रुपये निकालने के लिए काम आता है।**

चेक के प्रकार

चेक निम्नलिखित तीन प्रकार के होते है।

(i) वाहक चेक या धारक चेक (बियरर चेक)

(ii) आदेशित चेक (आर्डर चेक)

(iii) रेखांकित चेक (क्रास चेक)

वाहक चेक

यह चेक जिसके नाम होता है। वह अथवा किसी वाहक के द्वारा उस पर लिखी धनराशि को बैंक से प्राप्त कर सकता है। चेक पर खातेदार का हस्ताक्षर आवश्यक है।

आदेशिक चेक

इस प्रकार के चेक का भुगतान बैंक मात्र उसी व्यक्ति को करेगा जिसके नाम चेक काटा गया है।

रेखांकित चेक

जब चेक के बाँये कोने पर दो तिरछी समान्तर रेखाएँ खींचकर उनके मध्य & Co., Not-Negotiable अथवा A/c Payee Only लिख देते हैं, ऐसे चेक को रेखांकित चेक कहते हैं। A/c Payee Only Not-Negotiable लिखे चेक का भुगतान चेक धारक अपने खाते में ही जमा करके प्राप्त कर सकता है किन्तु & Co वाला क्रास चेक दूसरे के चालू खाते में भी जमा करके प्राप्त किया जा सकता है।

बचत खातों की पास बुक में प्रविष्टियों के आधार पर ब्याज की गणना

बचत खाते में ब्याज का परिकलन वर्ष में दो बार प्रायः मार्च और सितम्बर में किया जाता है। बैंक किसी माह का ब्याज खाताधारक के द्वारा जमा धनराशि पर उस माह की 10 तारीख और अन्तिम तारीख के बीच न्यूनतम धनराशि पर देता है। वर्तमान में बचत खातों पर 3.5% वार्षिक की दर से ब्याज दिया जाता है। परन्तु रिजर्व बैंक आफ इण्डिया द्वारा देय ब्याज दरों में समय-समय पर संशोधन किया जाता रहता है। बचत खाते की सुविधा डाकघर में भी होती है।

इसे भी जाने

आप भी, अपने प्रधानाचार्य से परामर्श करें, विद्यालय स्तर पर छात्रों का एक सहकारी बैंक स्थापित करने के लिए आग्रह करें, इससे परस्पर सहयोग की भावना का उदय होगा, बैंकिंग सीखेने का अवसर सुलभ हो जाएगा।

टिप्पणी—समीप के बैंक में जाकर खातों के प्रकार, खातों को खोलने, धन जमा करने, धन निकालने की प्रक्रिया तथा विभिन्न प्रकार के प्रपत्रों की जानकारी प्राप्त करें।

मूल्यांकन

(1) बैंक के क्या-क्या कार्य है?

(2) बैंक में खाता कैसे खोलते है?

(3) बैंक से धन कैसे निकाला जाता हैं?

(4) बैंक में कितने प्रकार के खाते खोले जा सकते हैं?

(5) चेक कितने प्रकार के होते हैं?

(6) नीचे दिये गये खातों में अन्तर स्पष्ट कीजिए।

(a) बचत खाता एवं चालू खाता

(b) सावधि जमा खाता एवं आवर्ती संचयी जमा खाता।

———

इकाई-8

लघुगणक की जानकारी घातांक से लघुगणक तथा इसका विलोम

इस इकाई को पढ़ने से आपको निम्नलिखित की जानकारी होगी—

(1) लघुगणक का अर्थ

(2) घात के लघुगणक को घात मे व्यक्त करना।

(3) आधार 10 पर सामान्य लघुगणक

(4) पूर्णांश एवं अपूर्णांश

(5) प्रतिलघुगणक का अर्थ।

(6) लघुगणकों के नियम

लघुगणक का अर्थ

शिक्षक शिक्षार्थियों से निम्नांकित सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति करायें—

घातांक n के रूप में	2^n	3^n	4^n	5^n	8^n	10^n	11^n	2^n	3^n
संख्या	8	81	16	125	64	10000	11	3	6
n का मान	3	4	—	—	—	—	—	—	—

यहाँ, $4^n = 16$, $5^n = 125$, $8^n = 64$, $10^n = 10000$, $11^n = 11$ आदि में प्रत्येक दशा में n का मान शिक्षार्थी ज्ञात कर लेते हैं, किन्तु $2^n = 3$ या $3^n = 6$ में n का मान सरलता से ज्ञात नहीं होता है, क्योंकि यहाँ n कोई पूर्ण संख्या नहीं है।

शिक्षार्थियों को बोध करायें कि

$2^n = 3$ या $3^n = 6$ में n का मान लघुगणक के रूप में लिखकर प्राप्त कर सकते हैं।

यथा $n = \log_2 3$ या $n = \log_3 6$

एक धनात्मक वास्तविक संख्या $a, (a \neq 1)$ के लिए अगर $a^m = b$ हो, तो $\log_a b = m.$

यहाँ, आधार a पर b का लघुगणक (logarithm) m है। log (लॉग) लघुगणक के अंग्रेजी शब्द logarithm का संक्षिप्त रूप है।

$a^m = b \Leftrightarrow \log_a b = m$

नोट :

1. log में 'एल' को अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षर से लिखते हैं।
2. आधार **a** को **b** की अपेक्षा छोटा तथा नीचे लिखते हैं।

शिक्षार्थियों को लघुगणक के अर्थ का बोध निम्नांकित रूप में करायें—

किसी दिए हुए आधार पर किसी संख्या का लघुगणक, आधार का वह घातांक होता है, जिसे आधार पर लगाने से वह संख्या प्राप्त की जा सकती है।

उदाहरण $\log_2 8 = ?$

चूँकि $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$\log_2 8 = 3$

इसी प्रकार $\log_3 81 = 4$ क्योंकि $3^4 = 81$; $4^2 = 16 \Leftrightarrow \log_4 16 = 2$

शिक्षार्थियों से $5^2 = 25$ को लघुगणक रूप में व्यक्त करायें।

घात के लघुगणक को घात में व्यक्त करना

शिक्षार्थियों को बोध करायें कि $2^4 = 16$ घातांकीय रूप है, जिसे लघुगणक के रूप में $\log_2 16 = 4$ लिखते हैं।

पुनः बोध करायें कि, लघुगणक रूप $\log_2 16 = 4$ को घातांकीय रूप $2^4 = 16$ में व्यक्त किया जा सकता है।

शिक्षार्थियों को निम्नांकित सारणी का अवलोकन करायें—

लघुगणकीय रूप	घातांकीय रूप
$\log_6 36 = 2$	$6^2 = 36$
$\log_5 125 = 3$	$5^3 = 125$
$\log_{10} 10000 = 4$	$10^4 = 10000$
$\log_{10} 0.01 = -2$	$10^{-2} = 0.01$
$\log_{10} 1 = 0$	$10^0 = 1$

निम्नांकित उदाहरणों द्वारा बोध करायें।

$\log_2 8 = 3$, क्योंकि $2^3 = 8$

$\log_2 64 = 6$, क्योंकि $2^6 = 64$

$\log_3 9 = 2$, क्योंकि $3^2 = 9$

$\log_3 81 = 4$, क्योंकि $3^4 = 81$

$\log_7 1 = 0$, क्योंकि $7^0 = 1$

यहाँ हम देखते हैं कि लघुगणक एक दूसरे रूप में लिखा हुआ घातांक है। आधार दोनों स्थितियों में समान रहता है।

उक्त सारणी तथा उदाहरण से—

$\log_{10} 1 = 0$, तथा $\log_7 1 = 0$

इसके आधार पर शिक्षार्थियों को बोध करायें कि किसी भी धनात्मक आधार (1 को छोड़कर) पर 1 का लघुगणक सदैव 'शून्य' होता है। शिक्षक विद्यार्थियों को इस बात का अहसास करायें कि आधार में हम संख्या 1 को क्यों नहीं लेते हैं।

$\log_a 1 = 0$, जहाँ $(a \neq 1)$

नोट : $\log_1 1$ अपरिभाषित है।

आधार 10 पर सामान्य लघुगणक

शिक्षार्थी भिज्ञ है कि हमारी संख्या पद्धति 'दाशमिक' है।

इसलिए आधार 10 पर लघुगणकों का प्रयोग सुविधाजनक है।

शिक्षार्थियों से 10 के निम्नांकित घातांकीय रूप से लघुगणकीय रूप व्यक्त कराये जाये।

घातांकीय रूप	लघुगणकीय रूप
$10^1 = 10$	$\log_{10} 10 = 1$
$10^2 = 100$	$\log_{10} 100 = 2$
$10^3 = 1000$	$\log_{10} 1000 = 3$
$10^0 = 1$	$\log_{10} 1 = 0$
$10^{-1} = 0.1$	$\log_{10} 0.1 = -1$
$10^{-2} = 0.01$	$\log_{10} 0.01 = -2$

शिक्षार्थियों को बोध करायें कि 10 की पूर्णांक घातांक की संख्या का लघुगणक ज्ञात करना आसान है। किन्तु ऐसी संख्याएँ जो 10 की पूर्णांक घातांक के रूप में न हों, उनका लघुगणक ज्ञात करने हेतु लघुगणक सारणी का प्रयोग करते हैं।

लघुगणक सारणी की सहायता से दशमलव में व्यक्त किसी भी संख्या का लघुगणक ज्ञात किया जा सकता है।

इस हेतु दशमलव संख्या को एक 'मानक रूप' में लिखते हैं।

यथा

37.3 को 3.73×10^1

413.7 को 4.137×10^2

0.125 को 1.25×10^{-1}

0.072 को 7.2×10^{-2}

'मानक रूप' की संख्या में केवल एक अंक पूर्णांक होता है।

इस हेतु दशमलव चिह्न को बाएँ या दाएँ हटाना पड़ता है।

दशमलव बिन्दु को जितने स्थान बाएँ हटाते हैं, 10 की उतनी घात से प्राप्त संख्या में गुणा करते हैं।

उपरोक्त उदाहरण से 413.7 का मानक रूप 4.137×10^2।

दशमलव बिन्दुओं को जितने स्थान दाएँ हटाते हैं, 10 की उतनी ऋणात्मक घात से प्राप्त संख्या में गुणा करते हैं।

उपरोक्त उदाहरण से 0.072 का मानक रूप 7.2×10^{-2}।

पूर्णांक (Characteristics) एवं अपूर्णांश (Mantissa)

शिक्षार्थियों को निम्नांकित घातांकीय रूप तथा उनके लघुगणकीय रूप का अवलोकन करायें।

$10^0 = 1 \quad \Leftrightarrow \log_{10} 1 = 0$

$10^1 = 10 \quad \Leftrightarrow \log_{10} 10 = 1$

$10^2 = 100 \quad \Leftrightarrow \log_{10} 100 = 2$

$10^3 = 1000 \quad \Leftrightarrow \log_{10} 1000 = 3$

$10^{-1} = 0.1 \quad \Leftrightarrow \log_{10} 0.1 = -1$

शिक्षार्थियों को बोध करायें कि

10 तथा 100 के बीच की संख्या का (आधार 10 पर) लघुगणक 1 तथा 2 के बीच की संख्या होगी। **अर्थात् 1 + एक दशमलव संख्या**

इसी प्रकार 100 और 1000 के बीच की संख्या का (आधार 10 पर) लघुगणक 2 तथा 3 के बीच की संख्या होगी। अर्थात् 2 + एक दशमलव संख्या।

तथा 0.1 एवं 1 के बीच एक संख्या का (आधार 10 पर) लघुगणक −1 तथा 0 के बीच की संख्या होगा। अर्थात् −1 + एक दशमलव संख्या

शिक्षार्थियों से ज्ञात करायें 1 तथा 10 के बीच की किसी संख्या का लघुगणक (आधार 10 पर) 0 और 1 के बीच की संख्या होगी अर्थात् 0 + एक दशमलव संख्या।

अतः एक संख्या के लघुगणक के दो भाग होते हैं। इसमें एक पूर्णांक भाग जिसे पूर्णांश (characteristics) कहते हैं।

दूसरा भिन्नात्मक भाग जो धनात्मक होता है। इसे अपूर्णांश (*mantissa*) कहते हैं।

नोट :

1. पूर्णांश धनात्मक, शून्य या ऋणात्मक हो सकता है, किन्तु अपूर्णांश सदैव धनात्मक लिया जाता है।
2. संख्याओं का लघुगणक आधार 10 पर ज्ञात किया गया है, अतः जहाँ लघुगणक में आधार नहीं लिखा हो तो आधार 10 ही मानते हैं। सुविधा के लिए आधार नहीं लिखते हैं।
3. संख्याओं के एक ही क्रम व्यवस्थित विभिन्न संख्याओं के लघुगणक में अपूर्णांक समान होते हैं।

यथा—$\log 741 = 2.8698$

$\log 74.1 = 1.8698$

$\log 7.41 = 0.8698$

$\log 0.741 = 1.8698$

क्योंकि

$741 = 7.41 \times 10^2$

$74.1 = 7.41 \times 10^1$

$7.41 = 7.41 \times 10^0$

$0.741 = 7.41 \times 10^{-1}$

शिक्षार्थियों को बोध करायें कि 1 से छोटी संख्याओं के लघुगणक में पूर्णांश ऋणात्मक होता है कि जबकि अपूर्णांश सदैव धनात्मक होता है ऐसी स्थिति में ऋण चिह्न (−) को पूर्णांक संख्या के ऊपर लिखते हैं जिसे 'बार' पढ़ते हैं।

संख्याओं का लघुगणक ज्ञात करना

पूर्णांश ज्ञात करना—

oeevekeâ ¤he nekÙe oeÀ10 का जो घातांक होता है, वही उस संख्या के लघुगणक का पूर्णांश होगा।

जैसे $\log (3.754 \times 10^2)$ में पूर्णांश $= 2$

$\log (1.25 \times 10^{-1})$ में पूर्णांश $= -1$

अपूर्णांश ज्ञात करना—

अपूर्णांश ज्ञात करने हेतु लघुगणक सारणी का प्रयोग करते हैं।

शिक्षार्थियों से पुस्तक में छपी लघुगणक सारणी को ध्यान से देखने को कहें। उन्हें बतायें कि—

भाग-1

1. इस सारणी के प्रथम स्तम्भ में 10 से 99 तक दो अंकों वाली संख्या है जो पंक्ति निर्धारित करती है।
2. बाद के प्रत्येक स्तम्भ के ऊपरी भाग पर 0 से 9 तक एक अंकीय संख्या है। इससे दायीं ओर औसत अन्तर (*Mean differences*) का खण्ड है, जिसमें 1 से 9 तक के स्तम्भ हैं।
3. किसी संख्या के लघुगणक का अपूर्णांश ज्ञात करने हेतु संख्या के प्रथम दो अंकों (जिसमें पहला अंक शून्य न हो) की पंक्ति देखते हैं। इस पंक्ति में तीसरे अंक वाले स्तम्भ से संख्या लिख लेते हैं। इस संख्या में चौथे अंक के औसत अन्तर स्तम्भ से प्राप्त संख्या का योग अपूर्णांश होता है।

उदाहरण : लघुगणक सारणी की सहायता से 45.32 का लघुगणक ज्ञात करना।

हल : 45.32 का मान रूप 4.532×10^1

$\log_{10} 45.32$ का पूर्णांश $= 1$

लघुगणक सारणी की सहायता से 45 की पंक्ति का स्तम्भ 3 पर अंकितसंख्या $= 6561$

औसत अन्तर स्तम्भ 2 से संख्या $= 2$

योगफल $6561 + 2 = 6563$

अपूर्णांश $= .6563$

अतः $\log 45.32 = 1.6563$

नोट :

शिक्षार्थियों को बोध करायें कि यदि किसी संख्या में केवल एक अंक हो तो इसे तीन अंकों तक लिख लेते हैं। यथा 2 को 2.00।

शिक्षार्थियों को बोध करायें कि अपूर्णांश ज्ञात करने में संख्या के केवल चार अंकों का ही प्रयोग होता है। अधिक अंक होने पर संख्या का चौथे अंक तक निकटतम मान ज्ञात करते हैं।

जैसे 1.1368 को 1.137 तथा 1.1362 को 1.136।

शिक्षार्थियों को बोध करायें कि लघुगणक सारणी में 10 से 19 की पंक्ति में औसत अन्तर स्तम्भ में दो-दो पंक्ति दी गयी हैं। तीसरे स्थान के अंक 0 से 4 तक के स्तम्भ में संख्याओं को पंक्ति से कुछ ऊपर लिखा गया है। इसलिए आवश्यकता पड़ने पर औसत अन्तर के स्तम्भ में ऊपर वाली संख्या ली जायेगी।

किन्तु 5 से 9 तक के स्तम्भ में संख्याओं को नीचे लिखा गया है। इसलिए आवश्यकता पड़ने पर औसत अन्तर के स्तम्भ से नीचे वाली संख्या जोड़ने हेतु ली जायेगी।

प्रतिलघुगणक (Antilogarithms)

यदि $\log x = y$ तो x को y का प्रतिलघुगणक कहते हैं। पुस्तक में दी गयी प्रतिलघुगणक सारणी का प्रयोग लघुगणक सारणी की तरह करते हैं। प्रतिलघुगणक सारणी में पहले स्तम्भ की संख्या में दशलमलव चिह्न लगा हुआ है और संख्याएँ .00 से .99 तक की पंक्तियाँ दी गयी हैं।

यदि $\log n = 2.4571$ तो संख्या n ज्ञात करना।

शिक्षार्थी n ज्ञात होने पर $\log n$ ज्ञात करना सीख चुके हैं। अब उन्हें बोध कराये कि $\log n$ ज्ञात हो तो n ज्ञात करने के लिए प्रतिलघुगणक (Antilog) ज्ञात करते हैं। इसके लिए प्रतिलघुगणक सारणी का प्रयोग करते हैं।

शिक्षार्थियों को बोध करायें कि,

किसी संख्या के लघुगणक में अपूर्णांश उस संख्या के अंकों के क्रम पर निर्भर करता है, अतः अपूर्णांश की सहायता से पहले संख्या के अंकों को क्रम में ज्ञात कर लेते हैं। पूर्णांश के आधार पर दशमलव चिह्न लगा कर पूर्णांकों की संख्या निर्धारित करते हैं।

इसमें $\log n$ का अपूर्णांश = .4571

प्रति लघुगणक सारणी से .45 की पंक्ति के सामने स्तम्भ 7

की संख्या = 2864, औसत अन्तर के स्तम्भ 1 की संख्या = 1

योगफल = 2864 + 1 = 2565

log n का पूर्णांश = 2

चूँकि लघुगणक की गणना के दौरान, संख्याओं के मानक रूप में दशमलव का स्थान एक अंक के बाद से शुरू होता है,

इसलिए 2865 में पूर्णांक भाग के 2 + 1 = 3 अंक होंगे।

अतः n = 286.5

संक्षेप में, यदि log$n$ = 2.4571 तो

n = Antilog 2.4571 = 286.5

शिक्षार्थियों को प्रतिलघुगणक सारणी के प्रयोग का अभ्यास कराया जाय। उन्हें सचेष्ट करें कि लघुगणक एवं प्रतिलघुगणक सारणी देखने में में सावधानी रखें।

लघुगणकों के नियम (Law of Logarithms)

शिक्षार्थी घातांकों के नियम से परिचित हैं। लघुगणक घातों को व्यक्त करने का दूसरा ढंग है। अतः घातांकों का नियम लघुगणकों में लागू होते हैं।

प्रथम नियम

यदि $a^x = m$ तो $\log_a m = x$

पुनः $a^y = n$ तो $\log_a n = y$

$a^x \times a^y = m.n$ (m, n धन पूर्णांक)

पुनः घातांक नियम (1) से

$a^x \times a^y = a^{x+y} = m.n$

लघुगणक के रूप में $\log_a mn = x + y = \log_a n$ (का मान रखने पर)

अतः $\log_a mn = \log_a m + \log_a n$

शिक्षार्थियों से निष्कर्ष निकलवाएँ कि

$\log_a mnp = \log_a m + \log_a n + \log_a p$

द्वितीय नियम

यदि $a^x = m$ तो $\log_a m = x$

पुनः $a^y = n$ तो $\log_a n = y$

$\frac{a^x}{a^y} = \frac{m}{n}$ (जहाँ m, n दो धनपूर्णांक हैं, तथा $n \neq 0$)

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = \frac{m}{n}$ (घातांक नियम 2 से)

लघुगणक रूप में $\log_a \frac{m}{n} = x - y = \log_a m - \log_a n$ (x, y का मान रखने पर)

$$\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$

इसी प्रकार $\log_a\left(\frac{m}{np}\right) = \log_a m - \log_a n - \log_a p$

तृतीय नियम

$a^x = m$ तो $\log_a m = x$

n को धनात्मक पूर्ण संख्या हो तो $(a^x)^n = m^n$ (घातांक नियम 3 से)

लघुगुणक रूप में, $\log_a(m^n) = n.x = n.\log_a m$ (x का मान रखने पर)

$$\boxed{\log_a(m^n) = n.\log_a m}$$

उदाहरण 1. $\sqrt{12.35}$ का मान लघुगणक के प्रयोग से ज्ञात करना।

हल : माना कि $x = \sqrt{12.35} = (12.35)^{\frac{1}{2}}$

$\log x = \frac{1}{2}\log 12.35$ (दोनों पक्षों का log लेने पर)

$= \frac{1}{2} \times (1.0917)$

$= 0.54584 \sim 0.5459$

$= 0.5459 \times 10^0$

$x = \text{Antilog } 0.5459 \times 10^0$

$= 3.515$ (लगभग)

उदाहरण 2. $\frac{2.7}{11.3}$ को लघुगणक की सहायता से हल करना।

हल : माना कि $x = \frac{2.7}{11.3}$

$$\begin{aligned}\log x &= \log 2.7 - \log 11.3\\ &= 0.4314 - 1.0531\\ &= -0.6217\\ &= -1 + (1 - .6217)\\ &= \bar{1}.3783\end{aligned}$$

घटाने की दूसरी विधि

$$\begin{array}{r} 0.4314\\ -\ 1.0531\\ \hline \bar{1}.3783\end{array}$$

x = Antilog $\bar{1}.3783$

= 0.2390

उदाहरण 3. $\frac{2\times3\times5}{7}$ का मान लघुगणक द्वारा ज्ञात कीजिए।

हल : $\log \frac{2\times3\times5}{7} = \log 2 + \log 3 + \log 5 - \log 7$

$$\begin{aligned}&= 0.3010 + 0.4771 + 0.6990 - 0.8451\\ &= 1.4771 - 0.8451\\ &= 0.6320 = 0.6320\times10^0\end{aligned}$$

$$\frac{2\times3\times5}{7} = \text{Antilog } 0.6320\times10^0$$

$$= 4.285$$

मूल्यांकन

1. निम्नांकित को लघुगणक के रूप में लिखिए—

(i) $5^4 = 625$ (ii) $10^3 = 1000$

(iii) $4^{-2} = \frac{1}{16}$ (iv) $10^{-2} = 0.01$

2. निम्नांकित को घातांक रूप में लिखिए—

(i) $\log_2 64 = 6$

(ii) $\log_2 25 = 2$

(iii) $\log \frac{1}{27} = -3$

(iv) $\log_{10}(0.001) = 3$

3. लघुगणक ज्ञात कीजिए—

(अ) 64 का आधार 8 पर

(ब) 0.1 का आधार 10 पर

(स) $\frac{1}{216}$ का आधार 6 पर

(द) 27 का आधार 3 पर

4. निम्नलिखित में प्रत्येक संख्या को मानक रूप में लिखिए—

(अ) 32.75

(ब) 427.2

(स) 0.0254

(द) 0.357

5. निम्नांकित का पूर्णांश ज्ञात कीजिए—

(i) $\log 37.35$

(ii) $\log 4176.2$

(iii) $\log 0.012$

(iv) $\log 0.0057$

6. लघुगणक सारणी की सहायता से log23.35 का अपूर्णांश ज्ञात कीजिए।

7. log 30 का मान log2, log3, log5 द्वारा व्यक्त कीजिए।

8. सिद्ध कीजिए— $\log\frac{25}{24} = 2\log 5 - 3\log 7 - \log 3$

9. सिद्ध कीजिए— $\log(2+3+4) = 2\log 3$.

10. लघुगणक एवं प्रतिलघुगणक सारणी का प्रयोग कर 3.756 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

11. लघुगणक एवं प्रतिलघुगणक सारणी का प्रयोग कर निम्नांकित का मान ज्ञात कीजिए—

$$\frac{3.75 \times 0.416}{2.75 \times 0.02 \times 9.07}$$

12. लघुगणक की सहायता से 10 का घनमूल ज्ञात कीजिए—

लघुगणकीय सारणियों का अनुप्रयोग

लघुगणकीय सारणियों का प्रयोग कर अभिकलन

चक्रवृद्धि ब्याज

शिक्षार्थी जानते हैं कि ऋण लेने पर, ऋण देने वाली संस्था ब्याज पर भी ब्याज लेती है जिसे चक्रवृद्धि ब्याज कहते हैं।

इसको निम्नांकित सूत्र की सहायता से ज्ञात करते हैं—

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

जहाँ A = मिश्रधन, P = मूलधन, r = दर, n = समय,

चक्रवृद्धि ब्याज $A - P$

नोट :—ब्याज छमाही देय होने पर $r = \frac{\text{वार्षिक दर}}{2}$ तथा n = 2 वर्ष (छमाही)

ब्याज तिमाही देय होने पर $r = \frac{\text{वार्षिक दर}}{4}$ तथा n = 4 वर्ष (तिमाही)

n का मान 2 से अधिक अथवा भिन्न में होने पर लघुगणक के प्रयोग से अभिकलन सरल हो जाता है।

उदाहरण 1. ` 4500 का 10.5 वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 5 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

यहाँ पर P = 4500, r = 10.5, n = 5

$$A = 4500\left(1 + \frac{10.5}{100}\right)^5$$
$$= 4500(1.105)^5$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$\log A = \log 4500 + 5 \log 1.105$

$= 3.6532 + 5 \times (0.0434)$ (लघुगणक सारणी से)

$= 3.6532 + 0.2170$

$= 3.8702$

$A = \text{Antilog } (3.8702)$ (प्रति लघुगणक सारणी से)

$= 7416$

चक्रवृद्धि ब्याज $= A - \text{P} = 7416 - 4500 = 2916$

अभीष्ट चक्रवृद्धि ब्याज = ` 2916 (लगभग)

उदाहरण 2. कितने समय में कोई धन 10% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से अपने से दो गुना हो जायेगा?

(दिया है $\log 2 = 0.3010$, $\log 11 = 1.0414$)

हल : माना कि धन $= P$ तो मिश्रधन $A = 2P$, $r = 10$, $n = ?$

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

$$2P = P\left(1 + \frac{10}{100}\right)^n$$

$$2 = \left(\frac{11}{10}\right)^n$$

दोनों पक्षों का log लेने पर

$$\log 2 = n(\log 11 - 10 \log 10)$$
$$0.3010 = n(1.0414 - 1)$$
$$0.3010 = n \times 0.0414$$
$$n = \frac{0.3010}{0.0414} = \frac{3010}{414}$$

$= 7.27$ वर्ष (लगभग)

जनसंख्या वृद्धि (Population Growth)

यदि किसी नगर की जनसंख्या किसी निश्चित प्रतिशत दर से बढ़ रही है, तो निश्चित समय (n) के पश्चात् नगर की जनसंख्या निम्न सूत्र से ज्ञात की जाती है :

n वर्ष बाद जनसंख्या = वर्तमान जनसंख्या $\left(1+\frac{\text{वृद्धि दर}}{100}\right)^n$

उदाहरण—एक गाँव की जनसंख्या इस समय 4000 है। उस गाँव की जनसंख्या प्रतिवर्ष 2.2% बढ़ रही है। 5 वर्ष बाद गाँव की जनसंख्या कितनी हो जायेगी?

हल: n वर्ष बाद जनसंख्या = वर्तमान समय $\left(1+\frac{\text{वृद्धि दर}}{100}\right)^n$

यहाँ n = 5 वर्तमान, जनसंख्या = 4000 वृद्धि पर = 2.2

माना कि 5 वर्ष बाद उस गाँव की जनसंख्या = x

$$x = 4000\left(1+\frac{2.2}{100}\right)^5$$
$$= 4000(1+0.022)^5$$
$$= 4000(1.022)^5$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर—

log x = log 4000 + 5 log 1.022

= 3.6021 + 5 × 0.0095 (लघुगणक सारणी के प्रयोग से)

= 3.6021 + 0.0475

= 3.6496

x = Antilog 3.6496

= 4463 (लगभग) (प्रतिलघुगणक सारणी से)

5 वर्ष बाद गाँव की जनसंख्या = 4463 (लगभग)

नोट : यदि जनसंख्या घट रही हो तो—

n वर्ष बाद जनसंख्या = वर्तमान जनसंख्या $\left(1-\frac{\text{कमी दर}}{100}\right)^n$

वस्तुओं का मूल्य ह्रास (Depreciation of value)

पुरानी वस्तुओं अथवा मशीनों के मूल्य समय के साथ-साथ घटता रहता है। समय के साथ मूल्य में आने वाली यह कमी मूल्य ह्रास कहलाती है। इसे अवमूल्यन भी कहते हैं।

यदि वस्तु का प्रारम्भिक मूल्य v_0, मूल्य ह्रास की दर $= r\%$ वार्षिक t वर्षों के बाद वस्तु का मूल्य v_t

$$\boxed{v_t = v_0\left(1-\frac{1}{100}\right)^1}$$

उदाहरण—एक मोटर साइकिल का मूल्य ` 60,000 है। इसके मूल्य में प्रतिवर्ष 5% अवमूल्यन हो रहा है। 5 वर्ष बाद इस मोटर साइकिल का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : $v_t = v_0\left(1-\frac{1}{100}\right)^1$

जहाँ v_0 = 60,000, 6 = 5, r = 5

$$\begin{aligned} v_t &= 60000\left(1-\frac{5}{100}\right)^5 \\ &= 60,000\,(1-0.05)^5 \\ &= 60,000\,(0.95)^5 \end{aligned}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

log v_t = log 60,000 + 5 log (0.95) (लघु सारणी के प्रयोग से)

$$\begin{aligned} &= 4.7782 + 5\times(\bar{1}.9777) \\ &= 4.7782 + (\bar{1}.8885) \\ &= 4.6667 \\ v_t &= Antilog\, 4.6667 \\ &= \text{` } 46410 \text{ (लगभग)} \end{aligned}$$

$$\{5\times\bar{1}.9777 = 5\times(-1)+5\times.9777 = -5+4.8885 = \bar{1}.8885\}$$

5 वर्ष बाद उस मोटर साइकिल का मूल्य = ` 46410

क्षेत्रमिति (Mensuration)

शिक्षक इस बात की सुनिश्चित करें कि छात्रों को क्षेत्रफल की समझ है।

आयत का क्षेत्रफल

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

$= l.b$ जहाँ l = लम्बाई, b = चौड़ाई

आयत का विकर्ण $= \sqrt{(\text{ल})^2 + (\text{चौ})^2}$

$= \sqrt{l^2 + b^2}$

आयत का परिमाप = (ल. + चौ.)

$= (l + b)$

उदाहरण—एक आयताकार बाग का क्षेत्रफल 1.4 हेक्टेअर हैं। इसकी भुजाओं में 5 : 4 का अनुपात है। बाग का परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल : बाग की लम्बाई एवं चौड़ाई में अनुपात = 5 : 4

माना कि बाग की लम्बाई $= 5x$ मी. तथा चौड़ाई $= 4x$ मी.

आयताकार बाग का क्षेत्रफल = ल. × चौ.

$= 5x \times 4x$ वर्ग मीटर

$= 20x^2$ वर्ग मीटर

बाग का क्षे. = 1.4 हेक्टेअर = 1.4 × 10000 वर्ग मी.

= 14000 वर्ग मी.

$20\ x^2 = 14000$

$$x^2 = \frac{14000}{20} = 700$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$2 \log x = \log 700$

$= 2.8451$ (लघुगणक सारणी से)

$\log x = 1.42255 \approx 1.4226$

$x = \text{Antilog } 1.4226$

= 26.46 (प्रतिलघुगणक सारणी से)

बाग की ल. $= 5x = 5 \times 26.46 = 132.30$ मी. (लगभग)

बाग की चौ. $= 4x = 4 \times 26.46 = 105.83$ मी. (लगभग)

बाग का परिमाप = 2 (ल. + चौ.)

= 2 (132.30 + 105.84) मी.

= 2 × 238.14 मी.

= 476.28 मी. (लगभग)

वर्ग का क्षेत्रफल

शिक्षार्थी पढ़ चुके हैं कि—

वर्ग का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2$

$= a^2$ (जहाँ a वर्ग की भुजा है।)

वर्ग का विकर्ण $= a\sqrt{2}$

वर्ग का परिमाप = $4a$

उदाहरण—एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल 1753 वर्ग मीटर है। मैदान का परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल : वर्ग का क्षे. = a^2 जहाँ a वर्ग की भुजा है।

$$a^2 = 1753$$

$$a = (1763)^{\frac{1}{2}}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log a = \frac{1}{2}\log 1753$$

$$= \frac{1}{2}\times 3.2438$$ (लघुगणक सारणी से)

$= 1.6219$

अतः $a = 41.87$ (प्रतिलघुगणक सारणी से)

मैदान का परिमाप $= 4 \times a = 4 \times 41.87$ मी.

$= 167.48$ मी. (लगभग)

त्रिभुज का क्षेत्रफल

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\text{आधार}\times\text{ऊँचाई} = \frac{1}{2}ah$

समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}\text{भुजा}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

त्रिभुज का क्षेत्रफल (जब तीनों भुजाओं की माप दी हो) $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

जहाँ $S = \frac{a+b+c}{2}$

उदाहरण 1. एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा की माप 7 सेमी. हो।

हल : समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $A = \frac{\sqrt{3} \times a^2}{4}$ जहाँ a = 7 सेमी.

$$A = \frac{\sqrt{3} \times 7^2}{4} = \frac{(3)^{1/2} \times 7^2}{4}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\begin{aligned}
\log A &= \frac{1}{2}\log 3 + 2\log 7 - \log 4 \\
&= \frac{1}{2} \times 0.4771 + 2 \times 0.8451 - 0.6021 \\
\log A &= 0.23855 + 1.6902 - 0.6021 \\
&= 0.23855 + 1.0881 \qquad (0.23855 \sim 0.2386) \\
&= 1.32665 = 1.3267 \\
A &= Antilog\, 1.3267 \\
&= 21.21 \text{ सेमी.}^2
\end{aligned}$$

उदाहरण 2. एक त्रिभुज जिसकी भुजाएँ क्रमशः 6 सेमी., 7 सेमी. व 8 सेमी. लम्बाई है। उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : a = 6 सेमी., b = 7 सेमी., c = 8 सेमी.

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{(6+7+8)}{2} = \frac{21}{2} = 10.5 \text{ सेमी.}$$

त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\sqrt{3} \times 7^2}{4} = \frac{(3)^{1/2} \times 7^2}{4} \\
A &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\
&= \sqrt{10.5(10.5-6)(10.5-7)(10.5-8)} \\
&= \sqrt{10.5 \times 4.5 \times 3.5 \times 2.5} \\
&= (10.5 \times 4.5 \times 3.5 \times 2.5)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$
\begin{aligned}
\log A &= \frac{1}{2}(\log 10.5 + \log 4.5 + \log 3.5 + \log 2.5) \\
&= \frac{1}{2}(1.0.212 + 0.6532 + 0.5441 + 0.3979) \\
&= \frac{1}{2}(2.6164)\backslash = 1.3082 \\
A &= Antilog\, 1.3082 \quad = 20.33 \text{सेमी.}^2 \text{ (लगभग)}
\end{aligned}
$$

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ विकर्णों का गुणनफल

$$A = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$$

जहाँ d_1, d_2 समचतुर्भुज के विकर्ण हैं।

समचतुर्भुज की भुजा $= \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$

नोट : समचतुर्भुज का विकर्ण ज्ञात होने पर, क्षेत्रफल की गणना सरलता से की जा सकती है।

उदाहरण 1. एक समचतुर्भुज के विकर्णों की माप क्रमशः 163 मी. व 95 मी. है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात करना।

हल : समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$

जहाँ d_1 = 163 मी., d_2 = 95 मी.

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \times 163 \times 95 \\
&= 0.5 \times 163 \times 95
\end{aligned}
$$

दोनों पक्षों का log लेने पर

$$
\begin{aligned}
\log A &= \log 0.5 + \log 163 + \log 95 \\
&= \bar{1}.6990 + 2.2122 + 1.9777 \\
&= 3.8889 \\
A &= Antilog\, 3.8889 \\
&= 7743
\end{aligned}
$$

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = 7743 मी^{2} (लगभग)

उदाहरण 2. एक समचतुर्भुज के विकर्ण क्रमशः 25 सेमी. तथा 15 सेमी. माप के हैं। समचतुर्भुज की भुजा की माप ज्ञात करना।

हल : समचतुर्भुज की भुजा $= \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$

जहाँ $d_1 = 25$ सेमी. $d_2 = 15$ सेमी.

$$x = \sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{625}{4} + \frac{225}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{850}{4}} = \left(\frac{50}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

दोनों पक्षों का log लेने पर

$$\log x = \frac{1}{2}(\log 850 - \log 4)$$
$$= \frac{1}{2}(2.9294 - 0.6021)$$
$$= \frac{1}{2} \times 2.3273 = 1.16365 \approx 1.1637$$
$$x = Anti\log 1.1637$$
$$= 14.57 \text{ सेमी. (लगभग)}$$

समलम्ब चतुर्भुज

समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समान्तर भुजाओं का योग) × उनके बीच की दूरी

उदाहरण—एक समलम्ब चतुर्भुज की समान्तर भुजाएँ क्रमशः 11.7 सेमी. व 18.6 सेमी. माप की हैं। इनके बीच की दूरी 6.5 सेमी. है। इस समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}(\text{समान्तर भुजाओं का योग}) \times \text{उनके बीच की दूरी}$$

$$= \frac{1}{2}(11.7 + 18.6) \times 6.5$$
$$= \frac{1}{2} \times 30.3 \times 6.5$$
$$= 0.5 \times 30.3 \times 6.5$$

दोनों पक्षों का log लेने पर

$$\log A = \log 0.5 + \log 30.3 + \log 6.5$$
$$= \bar{1}.6990 + 1.4814 + 0.8129$$
$$= 1.9933$$
$$A = Antilog\, 1.9933$$
$$= 98.47$$

अभीष्ट समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = 98.47 सेमी.^{2} (लगभग)

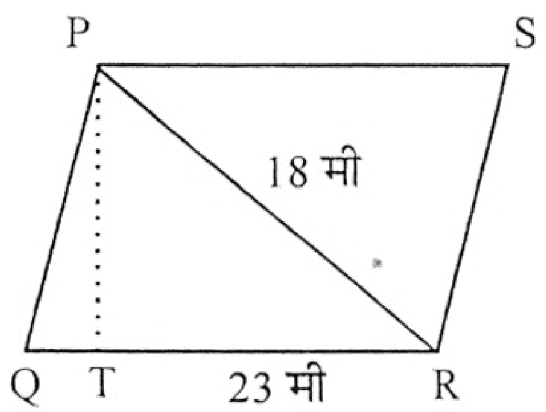
समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = एक भुजा की लम्बाई × इस भुजा के समान्तर भुजा से लम्बवत् दूरी।

उदाहरण—एक मैदान जो समान्तर चतुर्भुज के आकार का है जिसकी आसन्न भुजाएँ 23 मी. तथा 17 मी. की हैं इसके एक विकर्ण की माप 16 मी. है। छोटे शीर्ष लम्ब की लम्बाई ज्ञात करना।

हल : ΔPQR का क्षेत्रफल ज्ञात कर PT ज्ञात किया जायेगा।

ΔPQR का क्षेत्रफल $A = \sqrt{s-(s-a)(s-b)(s-c)}$



जहाँ $$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{23+17+18}{2}$$
$$= \frac{58}{2} = 29$$

$\Delta\ PQR$ का क्षेत्रफल

$$A = \sqrt{29(29-23)(29-17)(29-18)}$$
$$= \sqrt{29 \times 6 \times 12 \times 11}$$
$$= (29 \times 6 \times 12 \times 11)^{\frac{1}{2}}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\begin{aligned}\log A &= \frac{1}{2}(\log 29 + \log 6 + \log 12 + \log 11)\\ &= \frac{1}{2}(1.4624 + 0.7782 + 1.0792 + 1.0414)\\ &= \frac{1}{2} \times (4.3612)\\ &= 2.1806\\ A &= \text{Antilog}\, 2.1806\\ &= 151.6\end{aligned}$$

ΔPQR का क्षेत्रफल $\frac{1}{2} \times QR \times PT$

$$PT = \frac{2 \times \Delta PQR \text{ का क्षे.}}{QR}$$

$$h = \frac{2 \times 151.6}{23} \; [PT = h]$$

दोनों पक्षों का log लेने पर

$$\begin{aligned}\log h &= \log 2 + \log 151.6 - \log 23\\ &= 0.3010 + 2.1807 - 1.3617\\ &= 2.4817 - 1.3617\\ &= 1.1200\\ h &= \text{Antilog}\, 1.1200\\ &= 13.18 \text{ सेमी. (लगभग)}\end{aligned}$$

शीर्ष लम्ब की लम्बाई = 13.18 मी.

मूल्यांकन

लघुगणक की सहायता से ज्ञात कीजिए—

1. ` 2300 का 8% वार्षिक ब्याज की दर से 4 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।
2. कितना धन 5% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 15 वर्षों में ` 3600 हो जायेगा।
3. कितने वर्ष में 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से ` 500 का मिश्रधन रू0 630.50 हो जायेगा?
4. किसी शहर की जनसंख्या प्रतिवर्ष 5% बढ़ जाती है। यदि इस समय शहर की जनसंख्या 10000 हो तो 3 वर्ष बाद उस शहर की जनसंख्या कितनी हो जायेगी?
5. एक नगर की जनसंख्या 4% प्रतिवर्ष की दर से घट रही है। यदि नगर की वर्तमान जनसंख्या 60,000 है तो 2 वर्ष बाद उस नगर की जनसंख्या क्या होगी?

6. एक स्कूटर के मूल्य में प्रतिवर्ष 6% का अवमूल्यन हो रहा है। यदि एक स्कूटर वर्ष 2007 में ` 35000 में खरीदा गया था, तो वर्ष 2012 में उसका मूल्य कितना होगा?

7. एक मशीन ` 15000 में खरीदी गयी। इसका अवमूल्यन (मूल्य का ह्रास) प्रतिवर्ष 8% की दर से हो रहा है, तो 4 वर्ष बाद उस मशीन का मूल्य कितना होगा?

8. एक आयत की संलग्न भुजाएँ क्रमशः 23.7 सेमी. तथा 16.8 सेमी. भी हैं। आयत का क्षेत्रफल कितना होगा?

9. एक समबाहु त्रिभुज की भुजा 30.4 सेमी. लम्बी है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए?

10. एक त्रिभुज की भुजाएँ 20 सेमी., 21 सेमी. और 22 सेमी. की हैं। उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

11. एक समचतुर्भुज के विकर्ण क्रमशः 21 सेमी. व 30 सेमी. के हैं। उस समचतुर्भुज की भुजा की माप ज्ञात कीजिए।

12. एक समलम्ब चतुर्भुज की समान्तर भुजाएँ 11.6 सेमी. और 19.8 सेमी. की हैं। इनके बीच की दूरी 6.2 सेमी. है। इस समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

13. एक समान्तर चतुर्भुज की आसन्न भुजाओं की माप 31 सेमी. व 23 सेमी. हैं तथा इसके एक विकर्ण की लम्बाई 19 सेमी. है। इसके छोटे शीर्ष लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

———

इकाई-9
शेयर, लाभांश

इस इकाई को पढ़ने से निम्नलिखित की जानकारी होगी।

- ❑ शेयर
- ❑ लाभांश

शेयर और लाभांश (Share and Dividend)

जब कोई व्यक्ति कोई व्यापार या उद्योग करने के लिए स्वयं धन एकत्रित नहीं कर पाता है तो वह एक समूह बनाकर एक कंपनी की स्थापना करता है और उस कंपनी को पंजीकृत करा लेता है। इस प्रकार की कंपनी जनता से पूँजी प्राप्त करने के लिए शेयर जारी करके पूँजी प्राप्त करती है।

- **कम्पनी में लगाया पूरा धन उसकी पूँजी कहलाता है।**
- **पूँजी को प्रायः समान मूल्य की इकाइयों में बाँट दिया जाता है, प्रत्येक इकाई को शेयर कहते हैं।**

यदि कम्पनी को जनता से एक करोड़ रुपये एकत्रित करना है तो वह गणना की दृष्टि से दस-दस रुपये के शेयरों में बाँट लेती है। इस प्रकार इसके दस लाख शेयर हो जाते हैं। दी हुई शर्तों के अनुसार जनता को विज्ञापन द्वारा कम्पनी में पूँजी लगाने के लिए इन शेयरों को खरीदने के लिए आमंत्रित किया जाता है।

सभी को वांछित संख्या में शेयर आबंटित करने में कठिनाई होती है क्योंकि पूर्व से ही शेयरों की संख्या निश्चित होती है। जिन्हें शेयर आवंटित किए जाते हैं वे शेयर खरीद लेते हैं।

शेयर खरीदने वाला व्यक्ति कम्पनी का शेयरधारी या अंशधारी कहलाता है।

प्रत्येक शेयरधारी को कम्पनी की ओर से एक प्रमाणपत्र दिया जाता है जिसमें उन शेयरों का मूल्य और संख्या लिखी होती है जिसके लिए उसने धन लगाया है।

जिस मूल्य पर एक शेयर कम्पनी द्वारा जारी किया जाता है, उसे सममूल्य या अंकित मूल्य या फेस वैल्यू या पार वैल्यू कहते हैं।

उदाहरण—एक कम्पनी नई योजना के लिए 50 लाख रुपये की पूँजी एकित्रत करने के लिए शेयरों का विज्ञापन करती है। यदि एक शेयर का अंकित मूल्य 100 रुपये हो, तो कम्पनी द्वारा जारी किए गये शेयरों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : कुल पूँजी जो एकत्रित करनी है = 50 लाख रुपये

एक शेयर का अंकित मूल्य = 100 रुपये

माना जारी किए गये शेयरों की संख्या n है।

अतः $n \times 100 = 50,00,000$

$$n = \frac{50,00,000}{100} = 50,000$$

अतः कम्पनी 50,000 शेयर जारी करेगी।

शेयरों की खरीद एवं बिक्री

अन्य वस्तुओं की भाँति शेयरों को भी खुले बाजार (जिन्हें एक्सचेन्ज कहते हैं) में खरीदा या बेचा जा सकता है।

जिस मूल्य पर शेयर खुले बाजार में खरीदा या बेचा जाता है उसे शेयर का बाजार मूल्य कहते हैं।

जब शेयर का बाजार मूल्य उसके अंकित मूल्य से अधिक हो तो हम कहते हैं कि शेयर **अंकित मूल्य से ऊपर या 'अधिमूल्य पर'** है।

यदि बाजार मूल्य अंकित मूल्य से कम हो तो हम कह सकते हैं कि शेयर **'अंकित मूल्य से नीचे है** या **'बट्टे पर'** है।

यदि शेयर का बाजार मूल्य और अंकित मूल्य समान हो तो कहते हैं कि शेयर **'अंकित मूल्य पर'** है।

उदाहरण के लिए, यदि किसी शेयर का अंकित मूल्य 100 रुपये है और बाजार मूल्य 108 रुपये है तो शेयर 'अंकित मूल्य के ऊपर' कहा जायेगा परन्तु; यदि इस शेयर का बाजार मूल्य 60 रुपये है तो शेयर 'अंकित मूल्य के नीचे' कहा जायेगा।

लाभ और लाभांश का वितरण

जब कम्पनी को वर्ष के अन्त में लाभ होता है, तो लाभ का कुछ भाग नयी मशीन खरीदने या टैक्स देने आदि में आरक्षित कर दिया जाता है। शेष लाभ को शेयरधारियों को उनके द्वारा खरीदे गए शेयरों के अनुपात में बाँट दिया जाता है। **इस लाभ को लाभांश कहते हैं। लाभांश अंकित मूल्य पर दिया जाता है।**

यह लाभांश प्रति शेयर की दर या प्रतिशत की दर से वितरित किया जाता है। जैसे-यदि लाभांश 10 रुपये प्रति शेयर की दर से 100 शेयर के अंशधारी को दिया जाय तो उसे 1000 रुपये का

लाभांश मिलेगा। 25 प्रतिशत लाभ का अर्थ है कि 100 रुपये के अंशधारी को 25 रुपये का लाभांश मिलेगा।

दलाल और दलाली

शेयर ऐसे व्यक्तियों के माध्यम से खरीदे या बेचे जाते हैं जिनको शेयर बाजार का पूर्ण ज्ञान होता है। इन व्यक्तियों को शेयर दलाल या ब्रोकर कहा जाता है। दलाल लोग अपनी सेवाओं के लिए शेयर बेचने और खरीदने वालों से कुछ कमीशन या फीस लेते हैं। दलालों द्वारा लिए गए कमीशन को दलाली कहते हैं। दलाली को शेयर के बाजार मूल्य के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करते हैं।

ऋणपत्र

कम्पनियाँ अपने कारोबार को और बढ़ाने के लिए शेयर के स्थान पर ऋणपत्र **(Debentures)** जारी करती है, ये ऋणपत्र आम जनता से, जिनमें शेयरधारी भी सम्मिलित हो सकते हैं, ऋण प्राप्त करने हेतु जारी किये जाते हैं। कम्पनियाँ निश्चित अवधि के लिए ऋण लेती हैं और उस पर निश्चित दर से ऋणपत्र-धारकों को ब्याज अदा करती रहती हैं। जिस निश्चित अवधि के लिए ऋणपत्र जारी होते हैं, वह ऋणपत्रों पर लिखी होती है। ऋण की समयावधि समाप्त होने पर कम्पनियाँ ऋणपत्र धारकों को उनसे लिया गया ऋण वापस कर देती है।

शेयरों की ही भाँति ऋणपत्रों का भी निश्चित (या नियत) मूल्य उसका **'सममूल्य'** या **'अंकित मूल्य'** कहलाता है। ऋणपत्र भी बेचे या खरीदे जा सकते हैं, अतः इनका भी बाजार मूल्य होता है जो स्थिर नहीं होता और दिन-प्रतिदिन बदलता रहता है। जहाँ तक ब्याज के परिकलन का प्रश्न है, वह ऋणपत्र के सममूल्य पर ही परिकलित किया जाता है, न कि बाजार-मूल्य पर।

शेयर कम्पनी की पूँजी का अंग होता है और कम्पनी इसे वापस नहीं करती है जबकि ऋणपत्र के आधार पर लिया गया ऋण निश्चित अवधि के अंत में कम्पनीि द्वारा वापस कर दिया जाता है। जहाँ शेयर धारी कम्पनी का हिस्सेदार (मालिक) होता है, वहीं ऋणपत्र-धारक केवल कम्पनी को ऋण देता है और उसका हिस्सेदार नहीं होता। इसी प्रकार शेयर पर लाभआधारित विभिन्न दरों पर लाभंश दिया जाता है जबकि ऋणपत्र पर पूर्व निर्धारित दर पर ब्याज दिया जाता है, चाहे भले ही कम्पनी घाटे में जा रही हो। ब्याज का परिकलन प्रायः छमाही अथवा वार्षिक किया जाता है।

इसे भी जानिए

- **दलाली शेयर के बाजार मूल्य पर ली या दी जाती है, उसके अंकित मूल्य पर नहीं।**
- **किसी शेयर के बेचने पर प्राप्त राशि = बाजार मूल्य - दलाली**
- **किसी शेयर को खरीदने पर खर्च की गई राशि = बाजार मूल्य + दलाली**

उदाहरण एक क्रेता को 10 रुपये के 200 शेयरों के लिए क्या मूल्य देना पड़ेगा, यदि शेयर का बाजार मूल्य 50 रुपये प्रति शेयर बताये गये हैं? शेयरधारी को क्या लाभ होगा, जबकि उसने शेयर अंकित मूल्य पर खरीदा था?

हल : शेयर का अंकित मूल्य = 10 रुपये

1 शेयर का बाजार मूल्य = 50 रुपये

मूल्यांकन

1. पूँजी किसे कहते हैं?
2. शेयरधारी किसे कहते हैं? शेयर धारक तथा ऋणधारक में क्या अन्तर है?
3. अंकित मूल्य और बाजार मूल्य में क्या अन्तर है?
4. शेयर बट्टे पर कब होता है?
5. लाभांश किसे कहते हैं?
6. लाभांश शेयर के किस मूल्य पर दिया जाता है?
7. शेयर दलाल या ब्रोकर किसे कहते है?
8. दलाली शेयर के किस मूल्य पर ली या दी जाती है?
9. एक कम्पनी 25 लाख रुपये की पूँजी एकत्रित करने के लिए शेयरों का विज्ञापन करती है। यदि एक शेयर का अंकित मूल्य 100 रुपये हो तो कम्पनी द्वारा किये गये शेयरों की संख्या ज्ञात कीजिए।
10. एक क्रेता को एक शेयर का अंकित मूल्य 10 रुपये और बाजार मूल्य 40 रुपये प्रति शेयर बताया गया हो तो

    (i) क्रेता को 300 शेयरों के लिए क्या मूल्य देना पड़ेगा?

    (ii) शेयरधारी को क्या लाभ होगा, जबकि उसने शेयर अंकित मूल्य पर खरीदा था?
11. 100 रुपये अंकित मूल्य के 150 शेयर जिनका बाजार मूल्य 300 रुपये प्रति शेयर और दलाली 3% है, खरीदने के लिए कितना धन चाहिए?

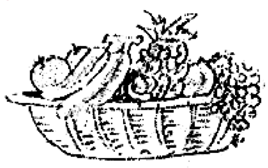
———

इकाई-10
समुच्चय की संकल्पना, लिखने की विधियाँ समुच्चय के प्रकार (सीमित, असीमित, एकल, रिक्त) समुच्चयों का संघ, अन्तर तथा सर्वनिष्ठ समुच्चय ज्ञात करना

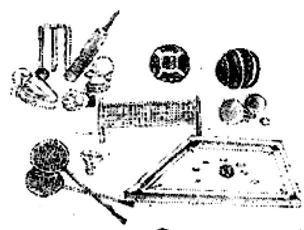
इस इकाई को पढ़ने से आपको निम्नलिखित की जानकारी होगी

- ❑ समुच्चय की संकल्पना
- ❑ लिखने की विधियाँ,
- ❑ समुच्चय के प्रकार (सीमित, असीमित, एकल, रिक्त)
- ❑ समुच्चयों का संघ
- ❑ अन्तर तथा सर्वनिष्ठ ज्ञात करना

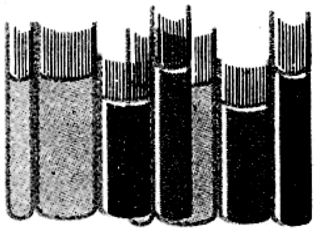
समुच्चय को अंग्रेजी भाषा में सेट (Set) कहा जाता है। सेट शब्द को प्रायः हम प्रतिदिन प्रयोग में लाते हैं। टी सेट, सोफा सेट, डिनर सेट, पेन सेट आदि ऐसे संग्रह हैं जिनकी वस्तुओं से हम परिचित हैं। इस प्रकार हम वस्तुओं के सुपरिभाषित संग्रह या समूह को सेट के रूप में लेते हैं। प्राकृतिक संख्याओं का समूह, किसी रेखाखंड के बिन्दुओं का समूह, किसी अभ्यास के प्रश्नों का संग्रह आदि ऐसे बहुत से संग्रह हो सकते हैं जिन्हें हम समुच्चय के रूप में लेते हैं। पर समुच्चय एक ऐसा शब्द है जिसकी स्पष्ट परिभाषा देना कठिन है। हम इसे समझ तो सकते हैं पर इसे शब्दों में बाँधना सरल नहीं है।



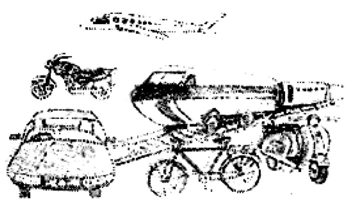
चित्र 1



चित्र 2



चित्र 3



चित्र 4

समुच्चय की अवधारणा सर्वप्रथम जर्मन गणिजज्ञ जार्ज कैन्टर ने सन् 1890 में दी। आज समुच्चय सिद्धान्त का उपयोग गणित की अधिकांश शाखाओं में हो रहा है। हम इस अध्याय में समुच्चयों और उन पर संक्रियाओं का अध्ययन करेंगे।

उपर्युक्त चित्रों को देखिए और बताइए कि इनमें क्या प्रदर्शित है?

हम देखते हैं कि चित्र 1 में फलों का समूह है। चित्र 2 में खेल के सामनों का समूह है। चित्र 3 में पुस्तकों का संग्रह है। चित्र 4 में यातायात के साधनों का समूह है।

इसे भी जाने—

निम्नांकित सारणी में समूह का नाम एवं प्रदर्शित समूह दिया गया है।

समूह का नाम	प्रदर्शित करता है।
प्रश्नावली	प्रश्नों का समूह
सप्ताह	दिनों का समूह
फूलमाला	फूलों का समूह
पुस्तकालय	पुस्तकों का समूह
क्रिकेट टीम	खिलाड़ियों का समूह
वर्ष	12 महीनों का समूह

निम्नांकित चित्रों को देखिए और बताइए कि ये क्या दर्शाते हैं?

चित्र 5 टाईयों के सेट को प्रदर्शित करता है।

चित्र 6 बर्तनों के सेट को प्रदर्शित करता है।

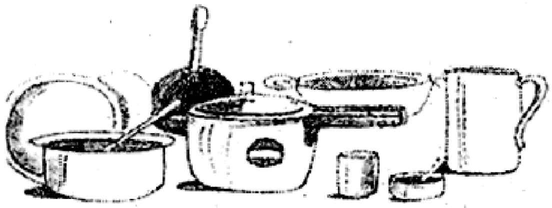
चित्र 7 शिक्षा सम्बन्धित समानों के सेट को प्रदर्शित करता है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि—

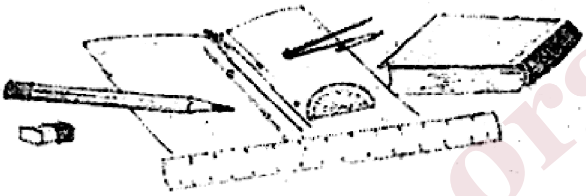
समूह, झुण्ड, संग्रह और सेट सभी वस्तुओं के संग्रह का बोध कराते हैं।

गणित में संग्रह का बोध कराने हेतु समुच्चय (Set) शब्द का प्रयोग करते हैं। परन्तु समूह या संग्रह समुच्चय नहीं होता है।

चित्र 5



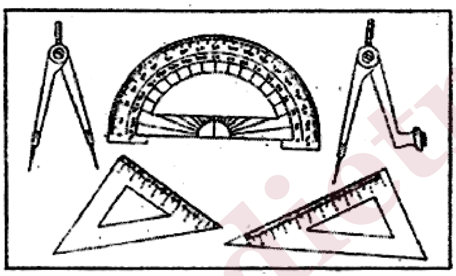
चित्र 6



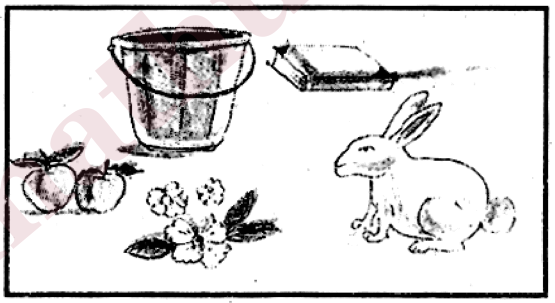
चित्र 7

+ − × ÷

चित्र 8



चित्र 9



चित्र 10

उपर्युक्त चित्रों को देखिए। क्या विशेषताएए हैं?

चित्र 8 गणितीय संक्रियाओं के प्रतीकों का समूह है।

चित्र 9 ज्यामितीय उपकरणों का समूह है।

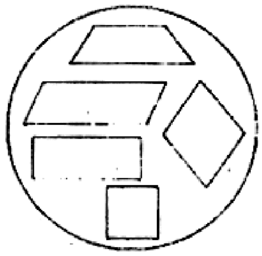
इस प्रकार हम देखते है कि—

प्रत्येक समूह में कुछ विशेषता है, जो समूह की प्रत्येक वस्तु में भी है। ये सभी समुच्चय हैं। चित्र 10 के समूह में क्या विशेषता है?

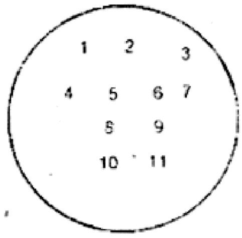
चित्र 10 किताब, फूल, फल, बाल्टी, खरगोश के संग्रह को प्रदर्शित करता है, यह एक समुच्चय नहीं है, क्योंकि संग्रहीत वस्तुओं के गुणों में समानता नहीं है। निम्नांकित चित्रों में चार समुच्चय प्रदर्शित किए गये हैं। बताइए इनमें क्या-क्या वस्तुएँ हैं—

A

B



C



D

समुच्चय A में खेलने के सामान-हाकी, फुटबाल, रैकेट, चिड़िया, बल्ला है।

समुच्चय B में फल - केला, आम, अमरूद, संतरा, खरबूजा हैं।

समुच्चय C में चतुर्भुज - समलम्ब, समान्तर चतुर्भुज, आयत, वर्ग, पतंगाकार चतुर्भुज हैं।

समुच्चय D में संख्याएँ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, हैं।

बताइए कि क्या 'आम' समुच्चय A में सम्मिलित हैं?

क्या 'आम' समुच्चय C में सम्मिलित है?

हम देखते हैं कि 'आम' समुच्चय B में सम्मिलित है।

इसी प्रकार अंक 10, समुच्चय A या B या C में सम्मिलित नहीं है, लेकिन समुच्चय D में सम्मिलित है।

अतः समुच्चय A,B,C,D में विशेषता यह है कि इसके सदस्य सुपरिभाषित हैं, क्योंकि हम पहचान सकते हैं कि अमुक समुच्चय में कौन-कौन से सदस्य सम्मिलित हैं और कौन नहीं।

विचार कीजिए कि क्या प्रत्येक समूह या संग्रह को समुच्चय कहा जा सकता है?

उदाहरण के लिए पुस्तकालय की उन पुस्तकों के समूह पर विचार कीजिए जो सभी को पढ़ने में अच्छी लगती हैं, क्या यह समूह समुच्चय है?

ऐसी पुस्तकों के समूह का निर्णय करना सरल नहीं है जो पढ़ने में सभी को अच्छी लगें क्योंकि कोई पुस्तक किसी को अच्छी लगती है तो वही पुस्तक दूसरे को अच्छी लगे, यह आवश्यक नहीं है। अतः यह समूह समुच्चय नहीं कहा जायेगा।

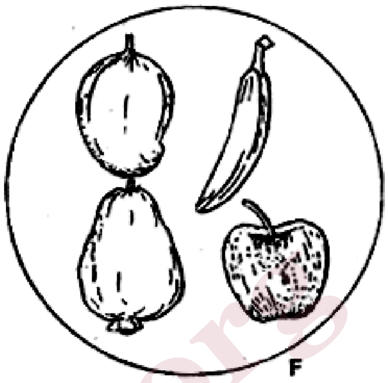
प्रयास कीजिए :

बताइए कि निम्नांकित समूहों में से कौन समूह समुच्चय है कौन नहीं?

1. प्रदर्शनी के आकर्षक चित्रों का समूह।
2. 5 से 15 के मध्य की प्राकृतिक संख्याओं का समूह।
3. प्रथम तीन अभाज्य संख्याओं का समूह।
4. वाटिका के सुन्दर फूलों का समूह।

इस प्रकार हम देखते है कि

सुस्पष्ट वस्तुओं के सुपरिभाषित संग्रह को समुच्चय कहते हैं। सुपरिभाषित संग्रह से अभिप्राय यह है कि सुनिश्चित होना चाहिए कि कौन सी वस्तु समुच्चय में सम्मिलित है और कौन सी वस्तु नहीं।



F

यहाँ वस्तु शब्द का प्रयोग व्यापक रूप में किया गया है— संख्याएँ, चित्र, शब्द, अक्षर, चिह्न आदि सभी गणित की दृष्टि में वस्तुएँ हैं।

चित्र में प्रदर्शित समुच्चय F में वस्तुओं के नाम बताइए।

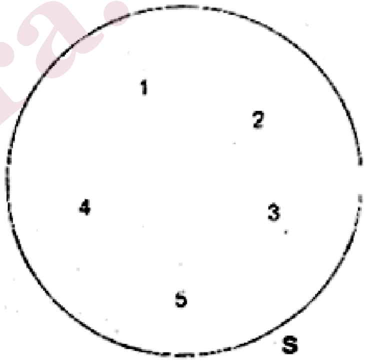
इनका समुच्चय से क्या सम्बन्ध है?

समुच्चय F में आम, केला, अमरूद, तथा सेब है।

आम समुच्चय F का सदस्य हैं।

केला समुच्चय F का सदस्य है।

सेब समुच्चय F का सदस्य है।



S

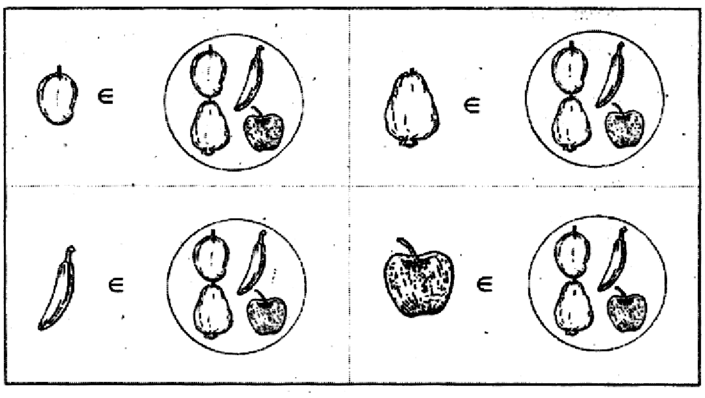
पार्श्व चित्र में प्रदर्शित समुच्चय S के सदस्यों के नाम बताइए।

1, 2, 3, 4, 5 समुच्चय S के सदस्य हैं।

इस प्रकार हम देखते हैं कि

उन वस्तुओं को जिनसे समुच्चय बनता है उन्हें समुच्चय के अवयव (element) या सदस्य member कहते हैं।

"समुच्चय का सदस्य है", इसे ग्रीक भाषा के अक्षर $\in$ से प्रदर्शित करते हैं। जैसे उपर्युक्त समुच्चय F तथा इसके सदस्यों के सम्बन्ध को निम्नांकित प्रकार भी लिख सकते हैं—



उदाहरण में समुच्चय S तथा सदस्य संख्याओं में $\in$ संकेतन का प्रयोग कर संबंध बताइएं क्या खरबूजा समुच्चय F का सदस्य है?

खरबूजा समुच्चय F का सदस्य नहीं है, इसे इस प्रकार भी लिख सकते है

खरबूजा $\notin$ समुच्चय F (खरबूजा does not belong to F)

यहाँ संकेतन $\notin$, 'सदस्य नहीं है' को प्रदर्शित करता है।

निम्नांकित को $\in$ या $\notin$ प्रयोग करके लिखिए।

1. 0 समुच्चय S का सदस्य नहीं है।
2. 4 समुच्चय S का सदस्य है।
3. केला समुच्चय F का सदस्य है।
4. अंगूर समुच्चय F का सदस्य नहीं है।

समुच्चय को प्रदर्शित करने की विधियाँ

1. सतुच्चयों को प्रायः A,B,C,P,Q,R आदि अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े (Capital) अक्षरों से प्रकट करते हैं तथा उनके अवयवों को छोटे (small) अक्षरों a,b,c,d,x,y आदि से प्रकट करते हैं।

   निम्नांकित समुच्चयों को देखिएः

   a. एक से आठ तक की प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय

      A = {1,2,3,4,5,6,7,8}

   b. 2. से छोटी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय

      B = {2,3,5,7,11,13,17,19}

   c. अंग्रेजी वर्णमाला में स्वरों का समुच्चय

      C = {a,e,i,o, u}

यहाँ हम देखते हैं कि समुच्चय A,B और C के सभी अवयव ज्ञात हैं और उनकी सूची बना दी गयी है। इन सब अवयवों को मझले कोष्ठक के अन्दर लिख दिया गया है और अवयवों को एक दूसरे से पृथक करने के लिए उनके बीच में अल्प विराम लगा दिया गया है।

उपर्युक्त की भाँति निम्नांकित समुच्चयों को निरूपित कीजिएः

1. एक से दस तक की प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय P
2. 20 से छोटी सभी विषम प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय Q
3. 12 के सभी अपवर्तकों का समुच्चय s

उपर्युक्त से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि समुच्चयों के निरूपण की एक प्रमुख विधि 'सारणीयन विधि' या सूची विधि' (Tabular or Listing Method) है। इस विधि द्वारा समुच्चय के समस्त अवयवों की सूची बनाकर मंझले कोष्ठक के अन्दर लिख दिया जाता है और अवयवों को पृथक दर्शाने के लिए उनके बीच अल्प विराम लगा दिया जाता है।

2. अब निम्नांकित समुच्चयों को देखिए—

1. 100 से छोटी सभी प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय A = {z:z एक प्राकृतिक संख्या है। और x < 100}
2. एशिया के सभी देशों की राजधानियों का समुच्चय B = {x : x एशियाई देशों की राजधानी है}
3. संख्या 4 के सभी अपवर्त्यों का समुच्चय C = {y : y संख्या 4 का अपवर्त्य है}
4. भारत की लोक सभा के सभी वर्तमान सदस्यों का समुच्चय D = {x : x भारत की वर्तमान लोक सभा का सदस्य है}

यहाँ हम देखते हैं कि समुच्चयों को निरूपित करने के लिए मझले कोष्ठक के अन्दर एक चर x, y या z लिख कर उसकी व्याख्या कर दी गयी है। x या y या z के बाद दो बिन्दु (एक के नीचे दूसरा) ':' लगा दिया गया है। 'x:' का अर्थ है 'x इस प्रकार का है कि'। दो बिन्दुओं की जगह पर एक खड़ी रेखा का भी कभी-कभी प्रयोग किया जाता है, यथा x' y'

इसे भी जानें

उपर्युक्त की भाँति निम्नलिखित समुच्चयों को लिखिए
1. सभी धनपूर्णांकों का समुच्चय P
2. सभी ऋणपूर्णांकों का समुच्चय S
3. विश्व के सभी देशों की राजधानियों का समुच्चय T

उपर्युक्त से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते है कि समुच्चयों को निरूपित करने की दूसरी विधि **नियम विधि या समुच्चय निर्माण विधि (Rule Method or Set Builder Method) है,** जिसमें मझले कोष्ठक के अन्दर कोई चर x या y लिखकर समस्त अवयवों के उभयनिष्ठ गुण के आधार पर उसकी व्याख्या कर दी जाती है।

उपर्युक्त उदाहरणों से यह भी स्पष्ट है कि अवयवों की संख्या कम होने पर अवयवों को मझले कोष्ठक के अन्दर किसी भी क्रम में लिख दिया जाता है।

यदि अवयवों की संख्या अधिक होती है, तो मझले कोष्ठक के अन्दर कोई व्यापक अवयव लिखकर समस्त अवयवों के उभयनिष्ठ गुण के आधार पर उसकी व्याख्या कर देना सुविधाजनक होता है।

समुच्चय प्रदर्शित करने की दो विधियाँ हैंः

1. सारणीयन विधि या सूची विधि

2. नियम विधि या समुच्चय निर्माण विधि

उदाहरण—यदि A= भारत के प्रथम पाँच प्रधान मंत्रियों के नामों का समुच्चय, तो इसकी सारणी विधि एवं नियम विधि से लिखिए।

हल : A= भारत के प्रथम पाँच प्रधान मन्त्रियों के नामों का समुच्चय।

सारणी विधिः

A= {पं. जवाहर लाल नहेरू, श्री लाल बहादुर शास्त्री, श्रीमती इन्दिरा गांधी, श्री गुलजारी लाल नन्दा, श्री मोरारजी देसाई}

नियम विधिः

A= { x:x भारत के प्रथम पाँच प्रधानमन्त्रियों में से एक है}

उदाहरण—B = 24 यदि s से छोटी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय, तो इसे सारणी एवं नियम विधि से लिखिए।

हल : सारणी विधि

B = {2,3,5,7,11,13,17,19,23}

नियम विधिः

B = {x : x एक अभाज्य संख्या है तथा $x < 24$}

उदाहरण—समुच्चय V = {a,e,i,o,u} का वर्णन कीजिए।

हल : समुच्चय V अंग्रेजी वर्णमाला के स्वरों का समुच्चय है।

यह भी जानिएः

1. समुच्चय के सारणीयन विधि के रूप में निरूपित करने में किसी भी अवयव को एक से अधिक बार नहीं लिखते हैं। उदाहरण के लिए committee शब्द के अक्षरों का समुच्चय {c,o,m,i,t,e} है।
2. यदि सदस्य वे ही हों, तो क्रम बदलने से समुच्चय नहीं बदलता है, जैसे

   A= {1,2,3}

   B = {3,2,1}

   C = {2,1,3}

   ये एक ही समुच्चय को प्रदर्शित करते है, क्योंकि अवयव समान हैं।

समुच्चय की सदस्य संख्या (Cordinal number)

निम्नांकित समुच्चयों की सदस्य संख्या बताइए :

(i) A = {केला, आम, अमरूद}

(ii) B = {a,b,c,d}

(iii) C= {1,4,7, 10,13}

(iv) D = {–2, –1}

(v) E = {0}

हम देखते हैं कि समुच्चय A में 3 सदस्य हैं, संक्षेप में इसे n (A) = 3 द्वारा अभिव्यक्त करते हैं।

इसी प्रकार समुच्चय B में 4 सदस्य हैं, या n (B) = 4

समुच्चय C में 5 सदस्य हैं, या n (C) = 5

समुच्चय D में 2 सदस्य हैं, या n (D) = 2

समुच्चय E में 1 सदस्य है, या n (E) = 1

यदि समुच्चय S में m सदस्य हों, तो संकेतन में समुच्चय की सदस्य संख्या n (S) = m

समुच्यय A = {2,4,6} की सदस्य संख्या बताइए।

n (A) = 3

A = {1,2,3} और B = {a,b,c} तो हम देखते हैं कि n (A) = 3 तथा n (B) = 3

∴ n (A) = n (B)

हम देखते हैं कि दोनों समुच्चयों की सदस्य संख्या समान है, परन्तु सदस्य अलग-अलग हैं। ऐसे समुच्चयों को समतुल्य समुच्चय कहते हैं। यहाँ समुच्चय A तथा समुच्चय B समतुल्य कहलायेंगे।

ऐसे समुच्चय जिनकी सदस्य संख्या समान हों, परन्तु सदस्य अलग-अलग हों, समतुल्य समुच्चय होते हैं।

1. यदि A = {a,e,i,o,u} तथा B = {x : x एक 6 से छोटी प्राकृतिक संख्या है।} n (A) तथा n (B) के मान बताइए।
2. क्या समुच्चय A और समुच्चय B समतुल्य हैं और क्यों?

निम्नांकित समुच्चयों को देखिए—

A = {1,2,3,4,5,6,7,8}

B = {a, b,c,d}

C = {a,e,i,o,u}

D = {1,2,3,4,...}

E = {2, 4, 6, 8, ..., 50}

F = {2}

G = { }

हम देखते हैं कि:

समुच्चय A के अवयवों की संख्या 8 है।

समुच्चय B के अवयवों की संख्या 4 है।

समुच्चय C के अवयवों की संख्या 5 है।

समुच्चय D के अवयवों की संख्या असीमित या अपरिमित है।

समुच्चय E के अवयवों की संख्या 25 है।

समुच्चय F के अवयवों की संख्या 1 है।

समुच्चय G के अवयवों की संख्या शून्य है अर्थात् इसमें कोई अवयव नहीं है।

स्पष्ट है कि उपर्युक्त समुच्चयों के अवयवों की संख्या भिन्न-भिन्न है। अवयवों या सदस्यों की संख्या की दृष्टि से समुच्चस भिन्न-भिन्न प्रकार के होते हैं। समुच्चय के अवयवों की संख्या सीमित या असीमित होती है। सीमित संख्या में अवयव वाले समुच्चयों में एक या शून्य अवयव वाले समुच्चय भी सम्मिलित हैं।

परिमित समुच्चय

निम्नांकित सारणी को देखिए:

समुच्चय	समुच्चयों के अवयवों की संख्या
A = {1,3,5,7,9}	5
B = {d,e,g,h}	4
C = {18, 16,24}	3
D = {11,12,13,14,15}	5
E = {1,2,3,4,5,6,7}	7
F = {2,4}	2

हम देखते हैं कि

समुच्चय A के सदस्यों की संख्या 5 है। समुच्चय B के सदस्यों की संख्या 4 है। समुच्चय C के सदस्यों की संख्या 3,D की 5,E की 7 तथा F की 2 हैं। इन सभी समुच्चयों में अवयवों की संख्या सीमित हैं।

बताइए किः

(i) समुच्चय {0} में कितने अवयव हैं?

(ii) समुच्चय {a,b,c,d,e} में अवयवों की संख्या क्या है?

(iii) समुच्चय {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19} में कितने अवयव हैं?

इससे निष्कर्ष निकलता है कि कुछ ऐसे समुच्चय होते हैं, जिनके अवयवों की संख्या परिमित होती है।

जिन समुच्चयों के अवयवों की संख्या परिमित होती है, वे परिमित (सीमित) (Finite) कहलाते हैं।

उदाहरण—निम्नांकित समुच्चयों में अवयवों की संख्या तथा इनके प्रकार बताइएः

(a) A = {6,7,8,9,10}

(b) B = {a, b, f, g, h}

(c) C = {x : x एक प्राकृतिक संख्या, x < 5}

हलः

(a) समुच्चय A के अवयवों की संख्या 5 है। यह परिमित समुच्चय है।

(b) समुच्चय B के अवयवों की संख्या 5 है। यह भी परिमित समुच्चय है।

(c) C = {x : x एक प्राकृतिक संख्या x > 5} = {1,2,3,4}

समुच्चय C के अवयवों की संख्या 4 है। यह भी परिमित समुच्चय है।

अपरिमित (असीमित) समुच्चय

निम्नांकित समुच्चयों को देखिए;

A = {1,2,3,4,5,6,...}

B = {2,4,6,8,...}

C = {1,3,5,7,9,....}

हम देखते हैं किः

समुच्चय A में केवल 6 अवयव अंकित हैं इसके बाद ... बिन्दु अंकित हैं। जिसका अर्थ है उसी क्रम में अवयवों की सततता अर्थात् इन 6 अवयवों के बाद उसी क्रम में अनन्त अवयव हैं। अतः समुच्चय A के अवयवों को गिना नहीं जा सकता है। इसी प्रकार समुच्चयों B और C के अवयवों को भी गिना नहीं जा सकता है।

इस प्रकार समुच्चय A,B,C के अवयवों की संख्या अपरिमित या अनन्त है।

प्रयास कीजिए :

(i) {2,4,6,8,10,...} में कितने अवयव हैं?

(ii) {2,3,5,7,11,...} में अवयवों की संख्या कितनी है?

(iii) {1,8,27,64,125,...} में कितने अवयव हैं?

इससे निष्कर्ष निकलता है कि ऐसे भी समुच्चय होते हैं जिनके अवयवों की संख्या अपरिमित होती है।

जिन समुच्चयों के अवयवों की संख्या अनन्त होती है, वे समुच्चय अपरिमित समुच्चय (Infinite set) कहलाते हैं।

उदाहरण—यदि A = {12,14,16,18,...} तो समुच्चय A का प्रकार बताइए।

हल : समुच्चय A उन सम संख्याओं का समूह है जो 10 से बड़े हैं।

अतः समुच्चय के अवयवों की संख्या अनन्त है।

अतः समुच्चय अपरिमित समुच्चय है।

उदाहरण—यदि B = {x : x, 3} से विभाज्य प्राकृतिक संख्या है), तो समुच्चय B का प्रकार ज्ञात कीजिए।

हल : 3 से विभाज्य प्राकृतिक संख्याएं असीमित हैं तथा 3, 6, 9, 12, 15, ... । इस प्रकार समुच्चय B के अवयवों की संख्या अपरिमित हैं अतः समुच्चय B अपरिमित समुच्चय है।

एकल समुच्चय

निम्नांकित समुच्चयों को देखिए:

(a) A = वर्तमान में भारत के प्रधानमन्त्री का समुच्चय

(b) B = किसी एक विद्यालय के प्रधानाचार्य का समुच्चय

(c) B = सबसे छोटी प्राकृतिक सम संख्या का समुच्चय

समुच्चय A वर्तमान में भारत के प्रधानमंत्री का समुच्चय है। किसी भी देश का किसी समय केवल एक ही प्रधानमंत्री होता है। अतः इस समय भारतवर्ष के प्रधानमंत्री की संख्या 1 है। अतः समुच्चय A के अवयवों की संख्या 1 है। इसी प्रकार समुच्चय B और C के अवयवों की संख्या भी 1 ही है।

समुच्चय Q = {x : x सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या} के अवयवों की संख्या पर विचार कीजिए।

यहाँ पर समुच्चय Q सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या का समुच्चय है। सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या 1 है, अतः समुच्चय Q के भी अवयवों की संख्या 1 ही है।

इससे निष्कर्ष निकलता है कि एक अवयव वाले समुच्चय भी होते हैं।

> **जिन समुच्चयों के अवयवों की संख्या केवल एक होती है, वे समुच्चय एकल समुच्चय (Singleton Set) कहलाते हैं।**

उदाहरण—9 और 12 के मध्य अभाज्य संख्याओं के समुच्चय के अवयवों की संख्या बताइए।

हल—9 और 12 के मध्य केवल 11 एक ऐसी संख्या है, जो अभाज्य है। अतः समुच्चय A = (11) के अवयवों की संख्या 1 है।

उदाहरण—यदि B = {x : x सबसे छोटा धनपूर्णांक}, तो समुच्चय का प्रकार बताइए।

हल—समुच्चय B सब से छोटे धनपूर्णांक का समुच्चय है। सबसे छोटा धनपूर्णांक है। अतः समुच्चय B एकल समुच्चय है।

रिक्त समुच्चय

निम्नांकित समुच्चयो को देखिए:

A = 2 से छोटी सम प्राकृतिक संख्या का समुच्चय

B = 1 से छोटी धन पूर्णांक संख्याओं का समुच्चय

हम जानते हैं कि 2 सबसे छोटी सम प्राकृतिक संख्या है। इससे छोटी कोई भी सम प्राकृतिक संख्या नहीं होती हैं। अतः समुच्चय A में कोई भी अवयव नहीं है।

समुच्चय B में भी कोई अवयव नहीं है, क्योंकि 1 से छोटा धनपूर्णांक नहीं होता है।

> **प्रयास कीजिए :**
>
> 1. यदि P = 2 और 3 के बीच के धनपूर्णांकों का समुच्चय, तो P के अवयवों की संख्या बताइए।
> 2. समुच्चय A = { } के अवयवों की संख्या बताइए।

अतः निष्कर्ष निकलता है कि ऐसे भी समुच्चय होते हैं, जिनमें अवयवों की संख्या शून्य होती है।

जिन समुच्चयों के एक भी अवयव नहीं होते हैं, उन्हें रिक्त समुच्चय (Null Set or empty set or void set) कहते हैं। ऐसे समुच्चय को ''{ }'' से या "ϕ" चिह्न से प्रदर्शित करते हैं।

टिप्पणीः चिह्न "ϕ" ग्रीक वर्णमाला का एक अक्षर है जिसे 'फाई' कहते हैं। ध्यान दें, समुच्चय {0} रिक्त समुच्चय नहीं है क्योंकि इसके अवयव की संख्या 1 है।

उदाहरण 99 से बड़ी दो अंकों की प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय का प्रकार लिखिए।

हल 99 से बड़ी दो अंकों की कोई भी प्राकृतिक संख्या नहीं होती है।

अतः 99 से बड़ी दो अंकों की प्राकृतिक संख्या का समुच्चय { } या रिक्त समुच्चय ϕ है।

उपसमुच्चय (Subset)

निम्नांकित समुच्चयों को देखिए

A = {a,b,c,d,e}

B = {a}

C = {a,e}

D = {c,d,e}

E = {b,c,d}

F = {b,c,d,e}

1. क्या समुच्चय B का अवयव, समुच्चय A का भी अवयव है?
2. समुच्चय B का अवयव और किस समुच्चय का भी अवयव है?
3. समुच्चय E के सभी अवयव किन-किन समुच्चयों के अवयव हैं?
4. क्या समुच्चय D का प्रत्येक अवयव समुच्चय E का भी अवयव है?
5. क्या समुच्चय A के सभी अवयव समुच्चय s के अवयव हैं?

हम देखते हैं कि समुच्चय B का अवयव समुच्चय A का भी अवयव है।

इसी प्रकार समुच्चय B का अवयव समुच्चय C में भी है। समुच्चय C,D,E और F के अवयव भी समुच्चय A के अवयव हैं।

समुच्चय B समुच्चय A का उपसमुच्चय और समुच्चय A, समुच्चय B का अधिसमुच्चय (Superset) कहलाता है। इसी प्रकार समुच्चय B , समुच्चय C समुच्चय C,B उपसमुच्चय और s का अधिसमुच्चय है।

बताइए

1 क्या समुच्चय D , समुच्चय A का उपसमुच्चय है?

2. समुच्चय A का समुच्चय E से क्या संबंध है?

3. समुच्चय A तथा समुच्चय F में कौन किसका उपसमुच्चय और कौन किसका अधिसमुच्चय है?

हम देखते हैं कि—

- **यदि समुच्चय B के सभी अवयव समुच्चय A के अवयव हैं, तो समुच्चय B समुच्चय A का उपसमुच्चय कहलाता है। इसे B $\subset$A द्वारा व्यक्त करते हैं तथा 'B उपसमुच्चय A' पढ़ते हैं।**
- **यदि समुच्चय B का प्रत्येक अवयव समुच्चय A का अवयव है, तो समुच्चय A समुच्चय B का अधिसमुच्चय कहलाता है। इसे A $\supset$B द्वारा व्यक्त करते हैं और 'A अधिसमुच्चय B' पढ़ते हैं।**
- **यदि समुच्चय B, समुच्चय A का उप समुच्चय हो, तो समुच्चय A समुच्चय B का अधिसमुच्चय होता है। प्रतीकात्मक भाषा में यदि B$\subset$ A तो A $\supset$B।**

पुनः देखिए,

A = {1,2,3}

B = {1}

C = {2,3}

D = ϕ

E = {2,3,1}

प्रयास कीजिए :

1. समुच्चय B का अवयव समुच्चय A में है, अतः समुच्चय B समुच्चय A का क्या कहा जायेगा?
2. समुच्चय C समुच्चय A का क्या कहा जायेगा?
3. समुच्चय D में अवयवों की संख्या कितनी है?
4. समुच्चय D, समुच्चय A का क्या कहलायेगा?
5. समुच्चय F समुच्चय A का क्या कहा जायेगा?

ध्यान दें, D एक रिक्त समुच्चय है जिसके अवयवों की संख्या शून्य है। यह रिक्त समुच्चय है। अतः यह कल्पना की जा सकती है कि समुच्चय D का अवयव समुच्चय A में भी है। अतः समुच्चय D समुच्चय A का एक उपसमुच्चय है। इसी प्रकार समुच्चय D, समुच्चयों B,C,D और E का भी एक उपसमुच्चय है। **व्यापक रूप में रिक्त समुच्चय ϕ सभी समुच्चयों का एक उपसमुच्चय होता है।** यही नहीं,

यह स्वयं अपना भी एक उप समुच्चय होता है।

क्या समुच्चय E, समुच्चय A का एक उपसमुच्चय है? ध्यान दें, समुच्चय E के सभी अवयव समुच्चय A में हैं, अतः समुच्चय E, समुच्चय A का एक उपसमुच्चय है अर्थात् $E \subset A$; परन्तु हम जानते हैं कि यहाँ E=A क्योंकि E और A के अवयव समान है। इस प्रकार के उपसमुच्चय उचित उप समुच्चय नहीं होते। उपर्युक्त से स्पष्ट है कि $B \subset A$ परन्तु $B \neq A$ इसी प्रकार $C \subset A$ परन्तु $C \neq A$, $D \subset A$ परन्तु $D \neq A$, अतः हम कह सकते हैं कि समुच्चय B,C और D समुच्चय A के उचित उपसमुच्चय हैं। समुच्चय B समुच्चय A का तभी एक उचित उपसमुच्चय कहलाता है जब A में कम से कम एक ऐसा अवयव अवश्य हो जो B में न हो, जबकि B का प्रत्येक अवयव A का अवयव भी हो। उचित उपसमुच्चय को संकेत $\underset{\neq}{\subset}$ द्वारा व्यक्त करते हैं। उपर्युक्त उदाहरण में $B \underset{\neq}{\subset} A$ ।

इस प्रकार

> यदि $B \subset A$, किन्तु $B \neq A$, तो B,A का एक उचित उपसमुच्चय होता है और इसे $B \underset{\neq}{\subset} A$ लिखा जाता है।

यह भी जानें:

ध्यान दें, $A \subset A$ तथा $A = A$1 इस कारण हम देखते हैं कि प्रत्येक समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय होता है।

क्या A,A का एक उचित उपसमुच्चय है?

ध्यान दें, कुछ समुच्चय ऐसे होते हैं जिनके अवयव समान होते है। जैसे शब्द ART तथा RAT के अक्षरों से बने समुच्चयों {A,R,T} तथा {R,A,T} के अवयव समान हैं।

इसी प्रकार समुच्चयों {1,2,3}, {2,3,1}, {3,2,1} के अवयव भी समान हैं, केवल अवयवों के क्रम बदले हुए है। ऐसे समुच्चयों को **सम समुच्चय** (Equal Sets) कहते हैं।

यदि $A = \{2,3,1\}$

$B = \{3,2,1\}$

यहाँ समुच्चय A का प्रत्येक अवयव B में है तथा समुच्चय B का प्रत्येक अवयव A में है। अर्थात् $A \subset B$ तथा $B \subset A$ दोनों समुच्चय A और B सम समुच्चय हैं।

- **ऐसे समुच्चय जिनके अवयव समान हैं, सम समुच्चय कहलाते हैं।**
- **यदि A और B दो सम समुच्चय है, तो $A \subset B$ तथा $B \subset A$।**
- **सम समुच्चस के अवयवों के क्रम कुछ भी हो सकते हैं।**

ध्यान दें, दो सम समुच्चस सदैव समतुल्य होते हैं, किन्तु यह आवश्यक नहीं है कि दो समतुल्य समुच्चय सदैव सम समुच्चय हों।

किसी समुच्चय के उपसमुच्चयों की संख्या

समुच्चय ϕ में कितने अवयव हैं?

समुच्चय $\{1\}$ में कितने अवयव हैं?

समुच्चय $\{1,2\}$ में कितने अवयव हैं?

समुच्चय $\{1,2,3\}$ में कितने अवयव हैं?

ध्यान दें, यहाँ समुच्चय ϕ, $\{1\}$ और $\{1,2\}$ तीनों ही समुच्चय $\{1,2,3\}$ के उपसमुच्चय हैं। स्वयं $\{1,2,3\}$ भी $\{1,2,3\}$ का एक उपसमुच्चय है।

- समुच्चय $\{1,2,3\}$ के उपर्युक्त उपसमुच्चयों के अतिरिक्त और कितने उप समुच्चय हो सकते हैं?
- समुच्चय $\{1,2,3\}$ के अवयवों में से केवल एक अवयव लेकर कितने उप समुच्चय बना सकते हैं?
- समुच्चय $\{1,2,3\}$ के अवयवों में से कोई दो अवयव लेकर कितने उप समुच्चय बनाये जा सकते हैं?

हम देखते हैं कि समुच्चय $\{1,2,3\}$ के 3 अवयवों में से शून्य , एक, दो तथा तीन अवयवों को लेकर निम्नांकित उपसमुच्चय बनाये जा सकते हैं।

ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$

बताइए, समुच्चय $\{1,2,3\}$ के सभी उप समुच्चयों की संख्या कितनी है?

देखिए,

(i) ϕ में कोई भी अवयव नहीं है $[n(\phi) = 0]$ अतः इसका केवल एक उपसमुच्चय स्वयं ϕ प्राप्त होगा।

अतः रिक्त समुच्चय ϕ के उपसमुच्चय की संख्या

$= 1 = 2^0$ $[\because a^0 = 1, a \neq 0]$

(ii) समुच्चय {1} एकल समुच्चय है, इसके कुल ϕ उपसमुच्चय s और {1} प्राप्त होते हैं। अतः {1} के उपसमुच्चयों की संख्या = 2 = 2^1

(iii) इसी प्रकार समुच्चय {1,2} के अवयवों से बने ϕ, {1}, {2} और {1,2} कुल 4 उपसमुच्चय प्राप्त होते हैं। इस प्रकार {1,2} के कुल उप समुच्चयों की संख्या = 4 = 2^2

(iv) इसी प्रकार समुच्चय {1,2,3} के कुल उपसमुच्चयों की संख्या = 8 = 2^3

(v) समुच्चय {1,2,3,4} के कुल उपसमुच्चयों की संख्या = 16 = 2^4

(vi) यदि n (B) = 5 तो B के कुल उपसमुच्चयों की संख्या = 32 = 2^5

इसे भी जाने

- **समुच्चय A, के कुल कितने उपसमुच्चय होंगे यदि n (A) = 6?**
- **यदि किसी समुच्चय D के कुल उपसमुच्चयों की संख्या 2^7 हो तो n (D) का मान क्या होगा?**

इस प्रकार निष्कर्ष निकलता है किः

यदि n (S) = m, तो समुच्चय S के कुल उपसमुच्चयों की संख्या = 2^m

उदाहरण—समुच्चय A = {7,11,13} के सभी उपसमुच्चय लिखिए तथा गिनकर इनकी संख्या बताइए।

हल—A = {7,11,13}

A के उपसमुच्चय ϕ {7}, {11}, {13}, {7,11}, {7,13}, {11,13}, {7,11,13}

उपसमुच्चयों की कुल संख्या = 8

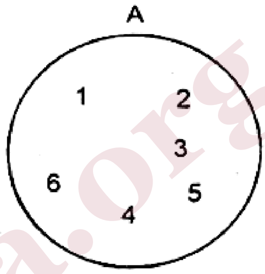
सामूहिक कार्य कीजिए

1. समुच्चय {a,b} का एक सम समुच्चय बताइए।
2. समुच्चय {1,2} के कुल कितने उपसमुच्चय हैं?
3. यदि $B \underset{\neq}{\subset} A$ तो बताइए कि समुच्चय A और समुच्चय B में किसके अवयवों की संख्या अधिक होगी?
4. किसी समुच्चय का सबसे कम संख्या के अवयव वाला उपसमुच्चय बताइए।

वैन आरेख द्वारा समुच्चयों का निरूपण

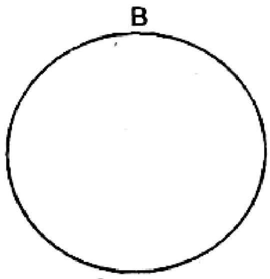
समुच्चयों के परस्पर सम्बन्धों और समुच्चयों पर होने वाली संक्रियाओं को चित्रों द्वारा आसानी से समझा जा सकता है। 18 वीं शताब्दी में स्विस गणितज्ञ आयलर (Euler) ने सर्वप्रथम समुच्चयों को चित्र द्वारा प्रदर्शित किया। बाद में ब्रिटिश तर्कशास्त्री वैन (Venn) ने 19वीं शताब्दी में इन्हें परिवर्तित करके वृत्त रूप में प्रयोग किया। इसी से इन्हें आयलर आरेख (Euler diagram) या वैन आरेख (Venn Diagrams) कहते हैं।

निम्नांकित चित्रों को देखिए



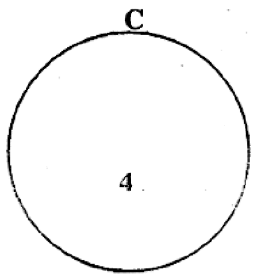
चित्र (i)

पार्श्व चित्र (i) समुच्चय A का है। इसके अवयव 1,2,3,4,5, और 6 है। यह परिमित समुच्चय को प्रदर्शित करता है।



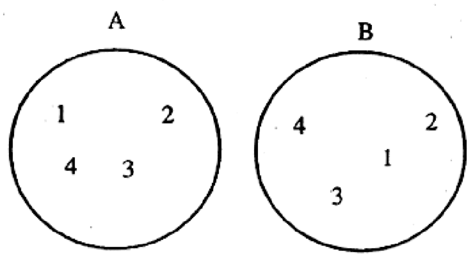
चित्र (ii)

पार्श्व (चित्र) (ii) समुच्चय B को प्रदर्शित करता है। इसमें कोई अवयव नहीं है। अतः समुच्चय B के अवयवों की संख्या शून्य है। चित्र (iii) रिक्त समुच्चय को प्रदर्शित करता है।



चित्रं (iii)

पार्श्व चित्र (iii) समुच्चय C को प्रदर्शित करता है। इसमें केवल एक अवयव 4 है। अतः यह एकल समुच्चय को प्रदर्शित करता है।



पार्श्व चित्र (iv) समुच्चय A तथा B को प्रदर्शित करता है। इनके अवयवों की संख्या समान है और वे एक से हैं।

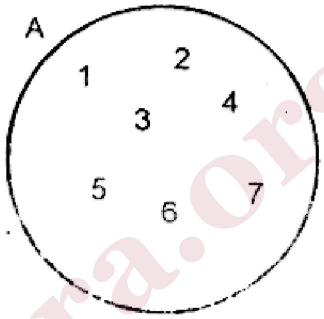
अतः चित्र (iv) दो समान समुच्चयों को प्रदर्शित करता है।

इस प्रकार हम समुच्चयों को चित्रों के द्वारा प्रदर्शित कर सकते हैं। इससे निष्कर्ष निकलाता है किः

समुच्चयों के परस्पर और समुच्चय पर होने वाली संक्रियाओं सम्बन्धों को चित्रों द्वारा आसानी से समझने हेतु समुच्चयों को चित्रों द्वारा निरूपित किया जा सकता है। इन चित्रों को वैन आरेख (Venn diagrams) कहते हैं।

उदाहरण—समुच्चय A= {1,2,3,4,5,6,7} को वैन आरेख से प्रदर्शित कीजिए।

हल—पार्श्व चित्र समुच्चय A को प्रदर्शित करता है।



समुच्चयों का सक्रियाएँ

जिस प्रकार अंकगणित की संक्रियाओं में दो संख्याओं के योग, अन्तर, गुणा तथा भाग करने से एक अन्य संख्या प्राप्त होती है, उसीप्रकार दो समुच्चयों पर संघ (Union), सर्वनि (Intersection), अन्तर (Difference) तथा पूरक (Complement) की संक्रियाएँ लागू करने पर एक नया समुच्चय प्राप्त होता है। ये संक्रियाएँ लगभग उसी प्रकार की होती हैं, जैसे जोड़ने, घटाने आदि की संक्रियाएँ होती हैं। यहाँ केवल संघ और सर्वनिष्ठ की संक्रियाओं पर विचार किया जायेगा।

दो समुच्चयों का संघ (Union of two sets)

निम्नांकित सारणी को देखिए

क्रमांक	समुच्चय A	समुच्चय B	A तथा B के अवयवों से बना समुच्चय
1	{1,2,3}	{4,5}	{1,2,3,4,5}
2	{2,4,6,8}	{6,8,10}	{2,4,6,8,10}
3	{1,5,9,10}	{5,9}	{1,5,9,10}
4	{11,12,13,14}	{ }	{11,112,13,14}

हम देखते हैं कि क्रमांक 1 में समुच्चय A के अवयव 1,2 तथा 3 हैं तथा समुच्चय B के अवयव 4 तथा 5 हैं। समुच्चय A के अवयवों में समुच्चय B के अवयवों को मिलाने पर कुल अवयव 1,2,3,4 तथा 5 प्राप्त होते हैं। इन अवयवों का समुच्चय {1,2,3,4,5} है, जो एक नया समुच्चय हैं। यह दो समुच्चयों A तथा B के सभी अवयवों का संघ समुच्चय है।

क्रमांक 2 में समुच्चय A के अवयव 2, 4, 6, 8 हैं और समुच्चय B के अवयव 6, 8, 10 हैं। समुच्चय A तथा B के अवयवों को मिलाने पर कुल अवयव 2,4,6,8,10 प्राप्त होते हैं, किन्तु अवयव 6 और 8 दोनों समुच्चयों में हैं।

अतः समुच्चय बनाते समय इन अवयवों को एक ही बार लिखते है क्योंकि किसी समुच्चय में अवयवों की पुनरावृत्ति नहीं होती है। अतः समुच्चय A और B का संघ समुच्चय {2,4,6,8,10} है।

क्रमांक 3 में समुच्चय B के सभी अवयव समुच्चय A में सम्मिलित हैं। अतः इनके संघ समुच्चय के अवयव 1,5,9 तथा 10 हैं। इस प्रकार समुच्चय A तथा B का संघ समुच्चय, {1,5,9, 10} है।

इसी प्रकार क्रमांक 4 में समुच्चय B एक रिक्त समुच्चय है अतः समुच्चय A और B का संघ समुच्चय {11,12,13,14} है। यह समुच्चय A के अवयवों का समुच्चय है। अतः किसी समुच्चय के साथ रिक्त समुच्चय का संघ लेने पर वही समुच्चय प्राप्त होता है।

इसे भी जाने

1. समुच्चय A = {7,8,9} तथा समुच्चय B = {15,16} का संघ समुच्चय बनाइए।
2. P = {a,e,i} तथा Q = {e,i,o,u} का संघ समुच्चय ज्ञात कीजिए।

इससे निष्कर्ष निकलता है कि यदि दो समुच्चयों A तथा B को आपस में मिलाएँ या उनका संघ करें, तो एक नया समुच्चय प्राप्त होता है, जिसके अवयव या तो A के अवयव होते हैं, या B के अवयव होते हैं, या A और B दोनों के अवयव होते हैं।

दो समुच्चयों A और B के संघ समुच्चय से अभिप्राय एक ऐसे समुच्चय से है, जो इन दोनां के सभी अवयवों से बनता है। इसको $A \cup B$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता और इसे A संघ B (A union B) पढ़ते हैं। संघ के लिए '$\cup$' चिह्न का प्रयोग करते हैं।

उदाहरण—यदि समुच्चय S = {4,5,6} तथा समुच्चय T = {7,8} तो $S \cup T$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल—यहाँ पर S = {4, 5, 6}

तथा $T = \{7, 8\}$

$\therefore \quad S \cup T = \{4, 5, 6\} \cup \{7,8\}$

$= \{4, 5,6,7,8\}$

उदाहरण—यदि $A = \{x : x$ प्राकृतिक सम संख्या है तथा $x < 9\}$ तथा $B = \{x : x$ प्राकृतिक संख्या है तथा $x < 5)$ तो $A \cup$ ज्ञात कीजिए।

हल—यहाँ पर $A = \{x : x$ प्राकृतिक सम संख्या है तथा $x < 9\}$

$= \{2,4,6,8\}$

तथा $B = \{x : x$ प्राकृतिक संख्या है तथा $x < 5\}$

$= \{1,2,3,4\}$

$\therefore \quad A \cup B = \{2,4,6,8\} \cup \{1,2,3,4\}$

$= \{1,2,3,4,6,8\}$

दो समुच्चयों का सर्वनिष्ठ (Intersection of two sets)

निम्नांकित सारणी को देखिए:

क्रमांक	समुच्चय A	समुच्चय B	A तथा B के उभयनिष्ठ अवयवों का समुच्चय
1	{4,5,7,8,9}	{8,9,10,11}	{8,9}
2	{1,3,5,7}	{9,11,13}	या {}
3	{2,4,6,8}	{2,8,16,18}	{2,8}
4	{3,6,9,12}	{6,15,18}	{6}

हम देखते हैं कि सारणी के क्रमांक 1 में समुच्चय A के अवयव 4,5,7,8,9 हैं और समुच्चय B के अवयव 8,9,11 हैं। इन दोनों में उभयनिष्ठ अवयव 8 और 9 हैं। इन उभयनिष्ठ अवयवों का समुच्चय {8,9} हैं।

सारणी के क्रमांक 2 में दोनों समुच्चयों में उभयनिष्ठ अवयव नहीं है, इसलिए इन दोनों के उभयनिष्ठ अवयवों का समुच्चय रिक्त समुच्चय है।

इसी प्रकार सारणी के क्रमांक 3 और 4 में दोनों समुच्चयों A और B के उभयनिष्ठ अवयवों के समुच्चय क्रमशः {2,8} तथा {6} हैं।

इन उभयनिष्ठ अवयवों के समुच्चय को इन समुच्चयों का सर्वनिष्ठ समुच्चय कहते हैं।

इसे भी जाने

1. यदि $A = \{1,3,7,11,13,17\}$ तथा $B = \{3,7,19\}$ तो इनके उभयनिष्ठ अवयवों का समुच्चय ज्ञात कीजिए।
2. यदि $P = \{21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}$ तथा $Q = \{26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35\}$ तो इनके उभयनिष्ठ अवयवों का समुच्चय ज्ञात कीजिए।

दो समुच्चयों A और B सर्वनिष्ठ (Intersection of A and B) समुच्चय वह समुच्चय है जिसमें समुच्चय A और B के उभयनिष्ठ (Common) अवयव होते हैं। इसको "$A \cap B$" द्वारा निरूपित किया जाता है। इसको A सर्वनिष्ठ B (A Intersection B) पढ़ते हैं। इसके लिए "$\cap$" चिह्न का प्रयोग करते हैं।

उदाहरण—समुच्चय $A = \{4, 5,6,7,8\}$ तथा $B = \{6,7,9,10\}$ का सर्वनिष्ठ समुच्चय लिखिए।

हल—यहाँ पर समुच्चय $A = \{4,5,6,7,8\}$ के अवयव 4,5,6,7, तथा 8 है।

समुच्चय $B = \{6,7,9,10\}$ के अवयव 6,7,9 तथा 10 हैं। इनके उभयनिष्ठ अवयव 6 और 7 हैं, इन अवयवों का समुच्चय $\{6,7\}$ है।

$\therefore A \cap B = \{4,5,6,7,8,\} \cap \{6,7,9,10\}$

$= \{6,7\}$

उदाहरण—यदि समुच्चय $A = \{x : x \in N, x$ एक सम संख्या$\}$ समुच्चय $B = A (x : x \in N, x$ पाँच से विभाज्य संख्या$\}$, जहाँ N प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय है; तो $A \cap B$ ज्ञात कीजिए।

हल—यहाँ पर $A = (x : x \in N, x$ एक सम संख्या$\}$

$= \{2,4,6,8,10,...\}$

$B = \{x : x \in N, x$ पाँच से विभाज्य संख्या$)$

$= \{5,10,15,20...\}$

समुच्चय A और B में स्पष्टतः उभयनिष्ठ अवयव 10,20,30, हैं।

$\therefore \quad A \cap B = \{2,4,6,8,10, ...\} \cap \{5,10,15,20,...\}$

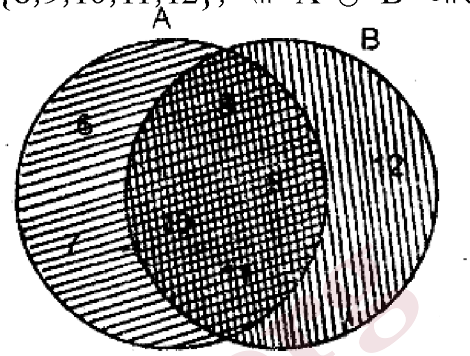
$= \{10,20,30,...\}$

$= \{x : x \in N$ तथा x 10 से विभाज्य है$\}$

समुच्चयों पर संक्रियाओं को वैन आरेख द्वारा प्रदर्शित करना

यदि समुच्चय $A = \{6,7,8,9,10,11\}$ तथा समुच्चय $B = \{8,9,10,11,12\}$, तो $A \cup B$ और $A \cap B$ को वैन आरेख द्वारा प्रदर्शित करना।

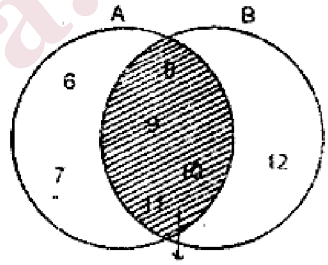
समुच्चय A और B के दो वैन आरेख पार्श्व चित्र की भाँति बनाइए।



सम्पूर्ण छायांकित भाग $A \cup B$

1. चित्र से स्पष्ट है कि अवयव 6 और 7 केवल समुच्चय A के अवयव हैं और 12 केवल समुच्चय B का अवयव है। अवयव 8,9,10,11 समुच्चय A और B दोनों के उभयनिष्ठ अवयव हैं। अतः चित्र देखकर हम कह सकते हैं कि

   $A \cup B \ \{6,7,8,9,10,11,12\}$

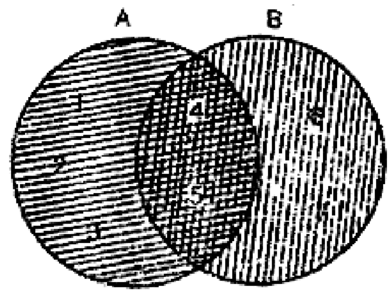


छायांकित भाग $A \cap B$

2. पार्श्व चित्र की भाँति पुनः समुच्चय A और B के चैन आरेख खींचिए। चित्र से स्पष्ट है कि समुच्चय A और B के उभयनिष्ठ अवयव 8,9,10 तथा 11 हैं।

   $A \cap B \ \{8,9,10,11\}$

उदाहरण—यदि समुच्चय $A = \{1,2,3,4,5\}$ तथा समुच्चय $B = \{4,5,6,7\}$ तो $A \cup B$ तथा $A \cap B$ का मान वैन आरेख द्वारा ज्ञात कीजिए।

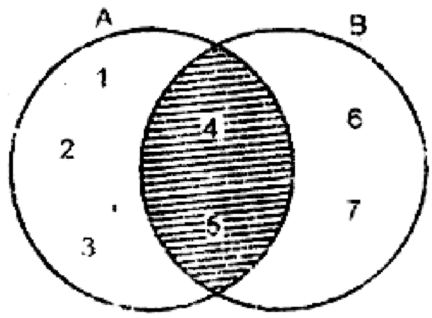


$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

हल—

समुच्चय s के अवयव 1,2,3,4, तथा 5 हैं और समुच्चय B के अवयव 4,5,6, तथा 7, हैं। दोनों समुच्चयों का सम्मिलित समुच्चय ज्ञात करने के लिए दो वृत्त खींचेंगे। किन्तु समुच्चय A और B के उभयनिष्ठ अवयव 4,5, हैं। अतः दो वृत्त ऐसे खीचेंगे कि उनका कुछ भाग उभयनिष्ठ रहे। पार्श्व चित्र में दो वृत्तों को छायांकित किया गया है जो दो समुच्चयों के संघ को प्रदर्शित करता है जिसमें 1,2,3,4,5,6 तथा 7 अवयव सम्मिलित हैं। ये अवयव A या B या दोनों के अवयव हैं।

$\therefore A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$



छायांकित भाग $A \cap B = \{4,5\}$

समुच्चय A= {1,2,3,4,5} तथा समुच्चय B = {4,5,6,7} के उभयनिष्ठ अवयव 4,5 है। अतः समुच्चय A और B के लिए ऐसे दो वृत्त खींचेगे जिसके उभयनिष्ठ भाग के अवयव 4 और 5 हैं। उभयनिष्ठ भाग को छायांकित किया जो सर्वनिष्ठ समुच्चय को प्रदर्शित करता है।

$\therefore A \cap B = \{4,5\}$

मूल्यांकन

1. निम्नांकित में से कौन से समूह सुपरिभाषित हैं?
   (i) किसी नगर के सभी सफल नागरिक।
   (ii) कक्षा 9 के एक विद्यार्थी द्वारा चयनित विषयों का समूह।
   (iii) 10 से कम सम प्राकृतिक संख्याएँ।
   (iv) किसी विद्यालय के आठवीं कक्षा के छात्रों का समूह।
   (v) भारत के सभी महत्त्वपूर्ण व्यक्तियों का समूह है।
2. बताइए कि निम्नांकित समूहों में से कौन समुच्चय हैं?
   (i) कक्षा 8 के लम्बे विद्यार्थियों का समूह।
   (ii) एक घर में रहने वाले समस्त व्यक्तियों का समूह।
   (iii) प्रथम दस प्राकृतिक संख्याओं का समूह।
   (iv) उन सभ्री सब्जियों का समूह जो खाने में अच्छी लगती हैं।
   (v) प्रथम 5 प्राकृतिक संख्याएँ जिनका इकाई अंक 5 हो।
3. निम्नांकित समुच्चयों के सदस्यों को बताइए। प्रत्येक समुच्चय के सदस्यों को मझले कोष्ठत {} में अर्द्धविराम (,) से पृथक करके लिखिए। जैसे
   (i) सप्ताह के दिनों का समुच्चय
   (ii) प्रथम चार प्राकृतिक सम संख्याओं का समुच्चय।
   (iii) वर्ष के प्रथम तीन अंग्रेजी महीनों का समुच्चय।
   (iv) प्रथम पांच पूर्ण संख्याओं का समुच्चय।
   (v) प्रथम छह प्राकृतिक विषम संख्याओं का समुच्चय।
4. निम्नांकित समुच्चयों का वर्णन कीजिएः
   (i) $W = \{0, 1,2,3,4,5,\}$
   (ii) $N = \{1,2,3,4,5,6\}$
   (iii) $O = \{1,3,5\}$

(iv) E = {2}

(v) M = {3, 6,9,12,15,18}

5. यदि A = {p,q,r,s,t}, तो निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं?

(i) $q \in A$ (ii) $p \notin A$

(iii) $t \notin A$ (iv) $r \in A$

6. यदि A = {1,2,3,4,5}, B= {क,ख,ग} और C = {+,- ×, ÷} तो निम्नांकित रिक्त स्थानों की पूर्ति संकेत $\in$ या $\notin$ द्वारा जो भी उचित हो, कीजिए।

(i) 5....A, (ii) ग.....A,

(iii) X ..... C, (iv) ÷.....B (v) 9 .... A,

(vi) र....B, (viii) +......C.

7. निम्नांकित समुच्चयों को सारणी विधि से लिखिए:

(a) A = संख्या 1 से 20 के मध्य विषम संख्याओं का समुच्चय।

(b) B = 5 से पूर्णतः विभाज्य 1 से 50 तक के धन पूर्णांकों का समुच्चय।

(c) C = वर्ष के हिन्दी महीनों के नामों का समुच्चय।

(d) D = वर्ष के उन महीनों के नामों का समुच्चय जिनमें 31 दिन होते हैं।

(e) E = अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों का समुच्चय।

8. निम्नांकित समुच्चयों को सारणी विधि से लिखिए:

(a) P = {–4, –3, –2, –1, 0, 1,2,3,4}

(b) Q = {अप्रैल, जून, सितम्बर, नवम्बर}

(c) R = भारत वर्ष के सभी राज्यों का समुच्चय।

(d) S = {a,e,i,o,u}

(e) T = {1, 8,27,64, 125}

9. 'FOLLOW' शब्द के अक्षरों के समुच्चय को सारणीयन विधि से लिखिए।

10. 'ALLAHABAD' शब्द के अक्षरों के समुच्चय को नियम विधि से लिखिए।

11. निम्नलिखित समुच्चयों को बायीं ओर सारणीयन विधि से तथा दायीं ओर नियम विधि से लिखा गया है। प्रत्येक समुच्चय के लिए दोनां विधि से जोड़े सुमेलित कीजिए—

(a) {2,4,6,8,10} (1) $\{x : x = n^3, n \in N\}$

(b) {1,8,27,64,...} (2) {x : x संख्या 18 का एक अपवर्तक है}

(c) {2,3,5,7,11} (3) {x : x एक अभाज्य संख्या 1<12}

(d) {1,2,3,6,9,18} (4) {x : x एक सम पूर्णांक तथा 1 < x < 11}

12. समुच्चय $A = \{3,6,9,12,15\}$ को नियम विधि से लिखिए।

13. प्रथम 8 प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय को सारणीयन विधि से लिखिए।

14. निम्नांकित समुच्चयों को सारणीयन एवं नियम विधि से लिखिए।

14. निम्नांकित समुच्चयों को सारणीयन एवं नियम विधि से लिखिए।

(a) 10 और 18 के बीच की सम संख्याओं का समुच्चय।

(b) 2 और 8 के बीच की पूर्ण संख्याओं का समुच्चय।

(c) ऋण पूर्णांकों का समुच्चय।

(d) 30 और 50 के बीच की अभाज्य संख्याओं का समुच्चय।

15. निम्नांकित समुच्चयों की सदस्य संख्या बताइए।

(i) $B = \{1,3,5,7\}$

(ii) $C = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

(iii) $D = \{0, 1,2,3\}$

16. प्रश्न संख्या 1 में दिये गये समुच्चयों के लिए निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य/असत्य हैं?

(a) $n(B) = n(D)$ (b) $n(C) = n(D)$

(c) $n(C) = 2n(D)$ (d) $n(D) = 2n(C)$

17. यदि समुच्चय $A = \{a,b,c,d,e\}$ तथा समुच्चय $B = \{c,d,f\}$ तो दोनों समुच्चयों का सर्वनिष्ठ समुच्चय ज्ञात कीजिए।

18. यदि $A = \{x : x \in N$ तथा $3 \leq x \leq 6\}$ तथा $B = \{x : x \in N$ तथा $x < 5\}$ तो $A \cap B$ का मान ज्ञात कीजिए। जहाँ N सभी प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय है।

A, 10 से लेकर 25 तक की प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय तथा B 6 से लेकर 15

19. तक की प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय है, तो दोनों समुच्चयों का सर्वनिष्ठ समुच्चय मसन ज्ञात कीजिए।

20. यदि $P = \{15,16,17,18,19,20\}$ तथा $Q = \{15, 20,25, 30\}$, तो $P \cap Q$ का मान ज्ञात कीजिए।

यदि $A = \{6, 8,11\}$, $B = \{1,2,3\}$ तो $A \cap B$ ज्ञात कीजिए।

21. यदि $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ तथा $B = \{9,10\}$ तो $A \cup B$ ज्ञात कीजिए।

22. यदि $A = \{1,3,5,7\}$ तथा $B = \{5, 7, 8 ,9\}$ तो दोनों समुच्चयों का संघ ज्ञात कीजिए।

(प्रश्न संख्या 3 और 4 में N का तात्पर्य प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चस से है।)

23. यदि A = {x : x $\in$ N तथा x < 5} तथा B = {x : x N तथा तो * का मान ज्ञात कीजिए।

24. यदि A = {x : x $\in$ तथा $x^2 \leq 16$ तथा $B = \left\{ x : x \in N \text{ तथा } \frac{4}{3} < 3 \right\}$ तथा s तो दोनों समुच्चयों का संघ समुच्चय ज्ञात कीजिए।

25. यदि P = {36 के अपवर्तक} तथा Q = (48 के अपवर्तक) तो A $\cup$B ज्ञात कीजिए।

26. समुच्चय (0,1) के उप समुच्चय लिखिए।

27. निम्नलिखित में सम समुच्चय छाँअिए:

(i) A = {1,2,3,4}

(ii) B = {3, –3}

(iii) C = {2,4,6,8}

(iv) D = {x : x^2 = 9}

28. एक समुच्चय S के कुल 32 उपसमुच्चय हैं। n (S) का मान क्या होगा?

29. समुच्चय {a, b} तथा {a, b, c} के उपसमुच्चय लिखिए और बताइए कि कितने उपसमुच्चय दोनों के उपसमुच्चय हैं?

30. निम्नलिखित में से सत्य कथनों को छाँटिए :

(i) {1,5} $\subset$ {1,2,3,4}

(ii) ϕ $\subset$ {a,b}

(iii) {x,y} $\subset$ {x ,y}

(iv) {a} $\supset$ {a,b,c}

(v) {1,2,3}$\supset${1}

(c) n (C) = 2n{D} (d) n (D) = 2n (C)

31. निम्नांकित समुच्चयों के प्रकार बताइए:

(a) –1 और +1 के बीच धन पूर्णांकों का समुच्चय।

(b) 15 से छोटी विषम प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय।

(c) सींग वाले घोड़ों का समुच्चय।

(d) उन प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय, जिनका दहाई का अंक 2 हैं।

(e) वर्ष के महीनों का समुच्चय जिसमें 31 दिन होते हैं।

32. "1946 से पहले भारत के प्रधानमंत्रियों का समुच्चय" का प्रकार लिखिए।

33. निम्नांकित कथन 'सत्य' है अथवा 'असत्य'?

(a) A = {2,4,6,8, ...} – परिमित समुच्चय

(b) B = {1,3,5,7} परिमित समुच्चय

(c) C = {f} – एकल समुच्चय

(d) D = अभाज्य प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय - असीमित समुच्चय

(e) E = {0} – रिक्त समुच्चय

34. निम्नांकित समुच्चयों के प्रकार बताइए:

(a) अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों का समुच्चय।

(b) प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय।

(c) P = {x : x^2 = 9}

(d) I = {x : x एक पूर्णांक है}।

(e) A = {x : x एक व्यक्ति जिसकी उम्र 200 वर्ष है}

(f) 3 से बड़ी प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय है।

क्या A = { x : x भारत का वर्तमान राष्ट्रपति है} एकल समुच्चय है?

7 और 9 के बीच विषम संख्याओं का समुच्चय का प्रकार लिखिए।

35. समुच्चय A = {10, 11, 12} तथा समुच्चय B = {12, 13} का संघ समुच्चय A ∪B वैन आरेख से प्रस्तुत कीजिए।

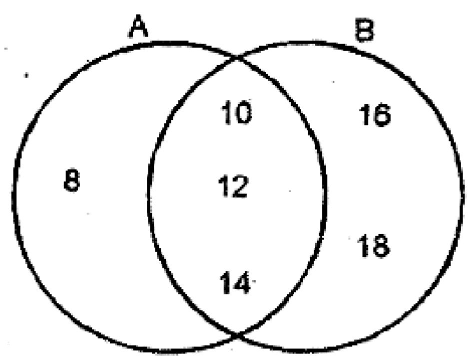
36. यदि समुच्चय A = {a,b,c,d} तथा समुच्चय B = {c,g,h} तो सर्वनिष्ठ समुच्चय A ∩B वैन आरेख से प्रदर्शित कीजिए।

37. निम्नांकित समुच्चयों का वैन आरेख द्वारा चित्रांकन कीजिए जहाँ पर A = {2,3,5,7} तथा s {3,7,11} है।

38. पार्श्व चित्र से निम्नांकित समुच्चयों के मान लिखिए।

(a) A ∩B

(b) A ∩B



39. निम्नांकित समुच्चयों का संघ समुच्चय ज्ञात कीजिए:

(a) A = {p,q,r} तथा B = {s,t,u}

(b) C = {1,3,5,7} तथा D = {1,2,4,6}

(c) G = (पिता, पुत्र तथा H = माता, पुत्र)

40. निम्नांकित समुच्चयों का सर्वनिष्ठ समुच्चय ज्ञात कीजिएः

(a) $A = \{3,6,9,12\}$ तथा $B = \{3,6, 10\}$

(b) $C = \{1,2,3,4,5,6\}$ तथा $D = \{2,4, 5,6\}$

(c) $E = \{x : x$ प्राकृतिक संख्या तथा $x < 5\}$

तथा $F = \{x : x$ प्राकृतिक संख्या तथा $4 \leq x \leq 7\}$

(d) $G = \{7,11,17\}$ तथा $H = \phi$

(e) G = सप्ताह के दिनों के नामों का समुच्चय तथा Q = (सोमवार, मंगलवार, बुधवार)

41. यदि समुच्चय $A = \{3, 6,9,12,15,18\}$ तथा $B = \{2,3,4,8\}$ तो $A \cup B$ वैन आरेख द्वारा ज्ञात कीजिए।

42. यदि समुच्चय $A = \{3,6,8,9,12\}$ तथा $B = \{6,9,15\}$ तो $A \cup B$, वैन आरेख द्वारा ज्ञात कीजिए।

43. यदि $A = \{3, 6, 8, 9, 12\}$ तथा $B = \{6, 9 ,15\}$ तो वैन आरेख द्वारा $A \cup B$, $A \cap B$ ज्ञात कीजिए।

44. किसी कस्बे में हिन्दी और अंग्रेजी भाषा का का कोई-न-कोई अखबार मंगाने वाले परिवारों की संख्या 1000 है। यदि 700 परिवार हिन्दी का अखबर मंगाते हों और 400 परिवार अंग्रेजी का, तो कितने परिवार दोनों भाषाओं के अखबार मंगाते हैं?

निम्न प्रश्नों में N को सभी प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय लीजिए।

45. यदि $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ तो बताइए कि निम्नांकित कथन 'सत्य' है या 'असत्य'।

(a) $9 \in A$ (b) $10 \in A$ (c) $3 \notin A$ (d) $\phi \in A$

(e) $4 \notin A$ (f) $\{2,4\} \in A$ (g) $7 \in A$ (h) $5 \notin A$

46. (a) शब्द MATHEMATICS के अक्षरों का समुच्चय लिखिए।

(b) शब्द SANITATION के स्वर का समुच्चय लिखिए।

(c) शब्द HYGIENE में अक्षरों का समुच्चय लिखिए।

47. समुच्चय $A = \{a,b,c,d\}$ तथा $B = \{e,f,g\}$ के अवयवों की संख्या लिखिए।

48. यदि A, 5 से विभाज्य प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय है, तों इसे सारणी विधि से लिखिए।

49. समुच्चय $B= \{1,2,3,4,...\}$ को नियम विधि से लिखकर समुच्चय का प्रकार भी लिखिए।

50. समुच्चय $A = \{x : x \in$ तथा $x < 9$ को सारणी विधि से लिखकर समुच्चय का प्रकार ज्ञात कीजिए।

51. समुच्चय $A = \{6,7,9,10,12\}$ तथा $B = \{10, 9, 13\}$, $A \cup B$, $A \cap B$ ज्ञात कीजिए।

$A = \{4,5,6,7,9\}$, s $\{3,4,5,6\}$ को वैन आरेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

———

इकाई-11
चर राशियों का गुणनखण्ड, दो वर्गों के अन्तर के रूप के व्यंजकों का गुणनखण्ड, द्विघातीय त्रिपदीय व्यंजकों का गुणनखण्ड

इस इकाई के अध्ययन से निम्नलिखित की जानकारी होगी—

(1) गुणनखण्ड की संकल्पना

(2) $(ax + ay)$ के प्रकार के व्यंजकों का गुणनखण्ड

(3) समूह बनाकर व्यंजकों का गुणनखण्ड या $ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2$ के प्रकार के व्यंजकों का गुणनखण्ड।

(4) दो वर्गों के अन्तर के रूप के व्यंजकों का गुणनखण्ड

(5) द्विघातीय त्रिपदीय व्यंजकों का गुणनखण्ड

(1) गुणनखण्ड की संकल्पना :

प्रशिक्षु प्राकृतिक संख्याओं के गुणनखण्ड से पूर्व परिचित है। इस इकाई में आप लोग बीजीय व्यंजकों के गुणनखण्ड से परिचित होंगे।

आप जानते हैं कि एक प्राकृतिक संख्या को अन्य प्राकृतिक संख्याओं के गुणनखण्ड के रूप में कई प्रकार से लिख सकते हैं। जैसे—

(i) $25 = 1 \times 25;\ 25 = 5 \times 5$

(ii) $30 = 1 \times 30;\ 30 = 2 \times 15;\ 30 = 3 \times 10;\ 30 = 5 \times 6$

इस प्रकार आप देख रहे हैं कि 25 को 1 व 5 से तथा 30 को 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 से भाग देने पर भागफल शून्य प्राप्त होगा। इस प्रकार 5 को 25 का एक गुणनखण्ड तथा 2, 3, 5 संख्या 30 के अभाज्य गुणनखण्ड है।

जब कोई संख्या अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफलों के रूप में लिखी रहती है तो यह उस संख्या का अभाज्य गुणनखण्ड रूप कहलाता है।

30 को अभाज्य गुणनखण्ड रूप में $2 \times 3 \times 5$ लिखते हैं। इसी प्रकार 105 का अभाज्य गुणनखण्ड रुप $3 \times 5 \times 7$ है। अब आप बीजीय व्यंजक $3x^2$, $7xy$, $2x^4y$ को गुणनफल रूप में कैसे लिखेंगे।

बीजीय व्यंजक को निम्नांकित प्रकार से लिखेंगे—

बीजीय $3x^2 = 1 \times 3 \times x \times x$

$7xy = 1 \times 7 \times x \times y$

$2x^4y = 1 \times 2 \times x \times x \times x \times x \times y$

> ध्यान दीजिए कि 1 पद $3x^2$, $7xy$ तथा $2x^4y$ का एक गुणनखण्ड है, क्योंकि
>
> $3x^2 = 1 \times 3 \times x \times x$
>
> $7xy = 1 \times 7 \times x \times y$
>
> $2x^4y = 1 \times 2 \times x \times x \times x \times x \times y$
>
> वास्तव में, 1 प्रत्येक पद का एक गुणनखण्ड होता है। जब तक विशेष रूप से आवश्यक न हो, हम 1 को किसी भी पद का अलग से गुणनखण्ड नहीं लिखते हैं।

उपरोक्त बीजीय व्यंजकों के पद, गुणनखण्डों के गुणनफलों के रूप में लिखा गया है। अतः $3x^2$ के गुणनखण्ड 3 तथा x होंगे तथा $7xy$ के गुणनखण्ड 7, x तथा y है। इस प्रकार—

> किसी संख्या या बीजीय व्यंजक के गुणनखण्ड वे सभी संख्याएँ या व्यंजक हैं जिनका गुणनफल उस संख्या या बीजीय व्यंजक के बराबर है।

कुछ बीजीय व्यंजक गुणनखण्ड रूप में ही होते हैं जिन्हें देखकर ही गुणनखण्ड स्पष्ट ज्ञात कर सकते हैं। जैसे—

(i) $5x(y + 3) = 5 \times x \times (y + 3)$ के गुणनखण्ड 5, x तथा $(y + 3)$ है।

(ii) $3(y + 1)(y + 2) = 3 \times (y + 1) \times (y + 2)$ के गुणनखण्ड 3, $(y + 1)$ तथा $(y + 2)$ है।

(iii) $6x(x + 1)(x + 4) = 3 \times 2 \times x \times (x + 1) \times (x + 4)$ के गुणनखण्ड 3, 2, x; $(x + 1)$ तथा $(x + 4)$ है।

कई व्यंजक जैसे $8x + 8y$, $x^2 + 5x$ और $x^2 + 5x + 6$ आदि पर ध्यान दीजिए। इस प्रकार के व्यंजकों के गुणनखण्ड किस प्रकार से ज्ञात करेंगे।

इस प्रकार के व्यंजकों का गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए क्रमबद्ध विधियों का उपयोग करना होगा।

(2) $(ax + ay)$ प्रकार के व्यंजकों का गुणनखण्ड (सार्वगुणनखण्ड विधि)

क्रियाकलाप

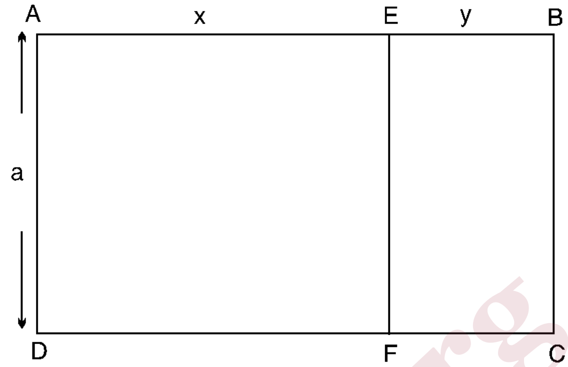
एक आयत $ABCD$ बनाइये जिसकी लम्बाई AB के दो भाग कीजिए। आयत के दोनों भाग की लम्बाई क्रमशः x तथा y है। मान लीजिए आयत की चौड़ाई a है।

आयत $ABCD$ का क्षेत्रफल = आयत की लम्बाई × आयत की चौड़ाई

$= AB \times AD$

$= (x + y)\ a$

$= a\ (x + y)$



आप देख रहे हैं कि आयत $ABCD$ दो आयत $AEFD$ तथा आयत $EBCF$ में विभक्त है।

अतः आयत $ABCD$ का क्षेत्रफल = आयत $AEFD$ का क्षेत्रफल + आयत $EBCF$ का क्षेत्रफल

$= x \times a + y \times a$

$= ax + ay$

स्पष्ट है कि आयत $ABCD$ का क्षेत्रफल दो स्थितियों में ज्ञात किया गया है। अतः

$a\ (x + y) = ax + ay$

या $ax + ay = a\ (x + y)$

अतः $ax + ay$ के गुणनखण्ड a और $(x + y)$ है।

उदाहरण 1. $6x + 6y + 6z$ का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : व्यंजक $6x + 6y + 6z$ में प्रत्येक पद में 6 से गुणा किया गया है। अतः 6 सर्वनिष्ठ गुणनखण्ड है।

$\therefore\ 6x + 6y + 6z = 6\ (x + y + z)$

अर्थात् व्यंजक के गुणनखण्ड क्रमशः 6 तथा $(x + y + z)$ है।

उदाहरण 2. $4x + 12y + 24a$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल : व्यंजक $4x + 12y + 24a = 4 \times x + 4 \times 3 \times y + 4 \times 6 \times a$

$= 4\ (x + 3y + 6a)$ ($\because 4$ सार्वनिष्ठ गुणनखण्ड है)।

अर्थात् व्यंजक के गुणनखण्ड क्रमशः 4 तथा $(x + 3y + 6a)$ है।

उदाहरण 3. $6x^2y + 3xy^2$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल : $6x^2y + 3xy^2 = \underline{3} \times 2 \times \underline{x} \times x \times \underline{y} + \underline{3} \times \underline{x} \times y \times \underline{y}$

$= 3\ x \times y \times (2x + y)$ ($\because 3xy$ सार्वनिष्ठ गुणनखण्ड है)

अतः व्यंजक के गुणनखण्ड $3, x, y$ तथा $(2x + y)$ है।

(3) व्यंजक $ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2$ के प्रकार के व्यंजकों का गुणनखण्ड (समूह बनाकर)

व्यंजक $ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2$ में चार पद हैं। इन चार पदों में कोई भी गुणनखण्ड सर्वनिष्ठ नहीं हैं। अतः इस व्यंजक का गुणनखण्ड करने के लिए पदों का समूह बनाते हैं। प्रथम दो पदों को एक साथ लेने पर उसमें a उभयनिष्ठ है तथा अन्तिम दोनों पदों में b उभयनिष्ठ है। इस प्रकार—

$$ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 = (ax^2 + ay^2) + (bx^2 + by^2)$$
$$= a\ (x^2 + y^2) + b\ (x^2 + y^2)\quad [\text{पुनः } (x^2 + y^2) \text{ उभयनिष्ठ है}]$$
$$= (x^2 + y^2)\ (a + b)$$

इस प्रकार इस व्यंजक का गुणनखण्ड $(x^2 + y^2)$ तथा $(a + b)$ है।

इस व्यंजक को आप अन्य प्रकार से भी हल कर सकते हैं। आप $(ax^2 + bx^2)$ तथा $(ay^2 + by^2)$ के समूह बना लें। प्रथम समूह में x^2 उभयनिष्ठ है तथा द्वितीय समूह में y^2 उभयनिष्ठ है। इस प्रकार—

$$ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 = (ax^2 + bx^2) + (ay^2 + by^2)$$
$$= x^2\ (a + b) + y^2\ (a + \mathrm{b})\quad [\text{पुनः } (a + b) \text{ उभयनिष्ठ है।}]$$
$$= (a + b)\ (x^2 + y^2)$$

अतः व्यंजक का गुणनखण्ड $(a + b)$ तथा $(x^2 + y^2)$ है।

इस प्रकार आपने देखा कि दोनों विधियों से गुणनखण्ड करने पर, उक्त व्यंजक का गुणनखण्ड $(a + b)$ तथा $(x^2 + y^2)$ है।

उदाहरण 4. व्यंजक $x^2 + yz + xy + xz$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल : व्यंजक $x^2 + yz + xy + xz$ में पहले और तीसरे पद क्रमशः x^2 और xy में x उभयनिष्ठ गुणनखण्ड हैं तथा दूसरे और चौथे पद में z उभयनिष्ठ हैं। अतः व्यंजक के पदों को इस प्रकार व्यवस्थित करते हैं कि प्रत्येक समूह का एक खण्ड उभयनिष्ठ हो। इस प्रकार

$$x^2 + yz + xy + xz = (x^2 + xy) + (yz + xz)$$
$$= x\ (x + y) + z\ (y + x)$$
$$= x\ (x + y) + z\ (x + y)\ (\because\ x + y = y + x)$$
$$= (x + y)\ (x + z)\qquad \{(x + y) \text{ उभनिष्ठ है}\}$$

उदाहरण 5. $3a^2 - xa^2 + yb^2 - 3b^2 + 4ca^2 - 4cb^2$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल : व्यंजक में छः पद है। पहले पद तथा चौथे पद में 3 उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है, दूसरे पद $-\ xa^2$ और तीसरे पद $+\ xb^2$ में x उभयनिष्ठ है, पाँचवें पद $4ca^2$ तथा छठें पद $(-\ 4cb^2)$ में $4c$ उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है।

$\therefore$ उभयनिष्ठ गुणनखण्ड के अनुसार समूह बनाने पर

व्यंजक $3a^2 - xa^2 + xb^2 - 3b^2 + 4ca^2 - 4cb^2 = (3a^2 - 3b^2) + (-xa^2 + xb^2)$
$+ (4ca^2 - 4cb^2)$

$= 3(a^2 - b^2) - x(a^2 - b^2) + 4c(a^2 - b^2)$

$= (a^2 - b^2)(3 - x + 4c)$ $\{(a^2 - b^2$ उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है$\}$

उपरोक्त व्यंजक में ध्यान दें कि प्रथम पद व द्वितीय पद में a^2 उभयनिष्ठ है, चतुर्थ व तृतीय पद में b^2 उभयनिष्ठ तथा पाँचवें और छठें पद में $4c$ उभयनिष्ठ है। परन्तु इनका समूह बनाने से व्यंजक का गुणनखण्ड नहीं निकाला जा सकता है। विचार करके बताइये कि ऐसा क्यों?

उपर्युक्त उदाहरणों से हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि :

चार पदीय व्यंजकों के गुणनखण्ड करते समय हम उन्हें दो समूहों में इस प्रकार व्यवस्थित करते हैं कि प्रत्येक समूह में एक खण्ड उभयनिष्ठ हो। इन समूहों के उभयनिष्ठ गुणनखण्ड को एक गुणनखण्ड के रूप में लेते हुए अन्य गुणनखण्ड को यथास्थान रखकर अग्रिम क्रिया करते हैं।

(4) दो वर्गों के अन्तर के रूप के व्यंजक के गुणनखण्ड

दो वर्गों के अन्तर के रूप के व्यंजक अर्थात् $a^2 - b^2$ प्रकार के व्यंजकों के गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम व्यंजक को व्यवस्थित करने की आवश्यकता होगी। जैसे–

$a^2 - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2$(एक ही पद ab को घटाने तथा जोड़ने पर)

$= (a^2 - ab) + (ab - b^2)$ (समूह बनाने पर)

$= a(a - b) + b(a - b)$

$= (a - b)(a + b)$

अतः $(a - b)$ तथा $(a + b)$, व्यंजक $a^2 - b^2$ के दो गुणनखण्ड हैं। इस प्रकार हम देखते हैं कि दो वर्गों के अन्तर के रूप के व्यंजक का गुणनखण्ड उन वर्गों के वर्गमूल के योग तथा उनके अन्तर के गुणनफल के बराबर होता है।

उदाहरण 6. व्यंजक $x^2 - 100$ के गुणनखण्ड कीजिए।

हल : सर्वप्रथम व्यंजक को दो वर्गों के अन्तर के रूप में लिखते हैं।

$$x^2 - 100 = (x)^2 - (10)^2$$

अब वर्गों $(x)^2$ तथा $(10)^2$ के वर्गमूल क्रमशः x तथा 10 ज्ञात करते हैं। पुनः दो वर्गों के अन्तर के गुणनखण्ड के सूत्र का प्रयोग करके दिये गये व्यंजक के गुणनखण्ड प्राप्त करते हैं।

$x^2 - 100 = (x)^2 - (10)^2$

$= (x - 10)\ (x + 10)$

अतः व्यंजक $(x^2 - 100)$ के दो गुणनखण्ड क्रमशः $(x - 10)$ तथा $(x + 10)$ है।

उदाहरण 7. $36x^2 - 25y^2$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल : $36x^2 - 25y^2 = (6x)^2 - (5y)^2$

$= (6x - 5y)\ (6x + 5y)$

अतः $(6x - 5y)$ तथा $(6x + 5y)$ व्यंजक के दो गुणनखण्ड हैं।

उदाहरण 8. $4a^2 - b^2$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल : $4a^2 - b^2 = (2a)^2 - (b)^2$

$= (2a + b)\ (2a - b)$

अतः $(2a + b)$ तथा $(2a - b)$ व्यंजक के दो गुणनखण्ड हैं।

उदाहरण 9. $72a^2 - 98b^2$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल : $72a^2 - 98b^2 = 2 \times 36a^2 - 2 \times 49ab^2$

$$= 2\{36a^2 - 49b^2\}$$
$$= 2\{(6a)^2 - (7b)^2\}$$
$$= 2(6a + 7b)(6a - 7b)$$

अतः व्यंजक के तीन गुणनखण्ड क्रमशः 2, $(6a + 7b)$ तथा $(6a - 7b)$ है।

उदाहरण 10. $144x^2 - 1$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल : $144x^2 - 1 = (12x)^2 - (1)^2$

$= (12x + 1)\ (12x - 1)$

इस प्रकार व्यंजक के दो गुणनखण्ड $(12x + 1)$ तथा $(12x - 1)$ हैं।

उदाहरण 11. $x^4 - y^4$ के गुणनखण्ड कीजिए।

हल : $x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2$

$= (x^2 + y^2)\ (x^2 - y^2)$

$= (x^2 + y^2)\ [(x^2 - y^2]$

$= (x^2 + y^2)\ (x + y)\ (x - y)$

अतः व्यंजक के तीन गुणनखण्ड $(x^2 + y^2)$, $(x + y)$ तथा $(x - y)$ हैं।

उदाहरण 12. $\frac{49}{x^2} - \frac{y^2}{36}$ का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{49}{x^2} - \frac{y^2}{36} = \left(\frac{7}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{6}\right)^2$

$= \left(\frac{7}{x} + \frac{y}{6}\right)\left(\frac{7}{x} - \frac{y}{6}\right)$

अतः व्यंजक के दो गुणनखण्ड $\left(\frac{7}{x} + \frac{y}{6}\right)$ तथा $\left(\frac{7}{x} - \frac{y}{6}\right)$ हैं।

(5) $a^2 + 2ab + b^2$ के रूप के व्यंजकों का गुणनखण्ड

प्रथम विधि—सर्वसमिका का प्रयोग करके

आप सभी जानते हैं कि $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

इस सर्वसमिका को निम्नांकित रूप में भी लिख सकते हैं।

$a^2 + 2ab+b^2 = (a + b)^2$

$= (a + b).\ (a + b)$

अतः $a^2 + 2ab + b^2$ व्यंजक का गुणनखण्ड $(a + b)$ तथा $(a + b)$ है।

द्वितीय विधि—समूह बनाकर

प्रशिक्षु समूह बनाकर व्यंजकों का गुणनखण्ड करना सीख चुके हैं। अतः $a^2 + 2ab + b^2$ के रूप के व्यंजकों का गुणनखण्ड समूह बनाकर ज्ञात करेंगे।

चूँकि $a^2\ 2ab + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2$

$= (a^2 + ab) + (ab + b^2)$

$= a\ (a + b) + b\ (a + b)$

$= (a + \mathrm{b})\ (a + b)$

अतः $a^2 + 2ab + b^2$ के गुणनखण्ड $(a + b)$ तथा $(a + b)$ है।

उदाहरण 13. $x^2 + 10x + 25$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल : (i) सर्वसमिका का प्रयोग करने पर—

$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \times x \times 5 + (5)^2$

$= (x + 5)^2$

$= (x + 5)\ (x + 5)$ $\quad [\because a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2]$

अतः $x^2 + 10x + 25$ का गुणनखण्ड $(x + 5)$ तथा $(x + 5)$ है।

(ii) समूह विधि द्वारा—

$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 5x + 5x + 25$

$= (x^2 + 5x) + (5x + 25)$

$= x\ (x + 5) + 5\ (x + 5)$

$= (x + 5)\ (x + 5)$

अतः $x^2 + 10x + 25$ के गुणनखण्ड $(x + 5)$ तथा $(x + 5)$ है।

उदाहरण 14. $a^2 + \frac{8}{3}a + \frac{16}{9}$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल : (i) सर्वसमिका के प्रयोग द्वारा—

$$a^2 + \frac{8}{3}a + \frac{16}{9} = a^2 + 2 \times a \times \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$= \left(a + \frac{4}{3}\right)^2$$

$$= \left(a + \frac{4}{3}\right)\left(a + \frac{4}{3}\right)$$

अतः $a^2 + \frac{8}{3}a + \frac{16}{9}$ के गुणनखण्ड $\left(a + \frac{4}{3}\right)$ तथा $\left(a + \frac{4}{3}\right)$ है।

(ii) समूह विधि द्वारा—

$$a^2 + \frac{8}{3}a + \frac{16}{9} = a^2 + \frac{4}{3}a + \frac{4}{3}a + \frac{16}{9}$$

$$= \left(a^2 + \frac{4}{3}a\right) + \left(\frac{4}{3}a + \frac{16}{9}\right)$$

$$= a\left(a + \frac{4}{3}\right) + \frac{4}{3}\left(a + \frac{4}{3}\right)$$

$$= \left(a + \frac{4}{3}\right)\left(a + \frac{4}{3}\right)$$

अतः $a^2 + \frac{8}{3}a + \frac{16}{9}$ व्यंजक के गुणनखण्ड $\left(a + \frac{4}{3}\right)$ तथा $\left(a + \frac{4}{3}\right)$ है।

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि $a^2 + 2ab + b^2$ प्रकार के व्यंजकों का गुणनखण्ड प्रत्येक विधि से $(a + b)$ तथा $(a + b)$ है।

(6) व्यंजक $(a^2 - 2ab + b^2)$ के रूप में व्यंजकों का गुणनखण्ड

प्रथम विधि—सर्वसमिका का प्रयोग करके–

आप जानते हैं कि

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

इस सर्वसमिका को आप निम्नांकित रूप में भी लिख सकते हैं कि

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$
$$= (a - b)(a - b)$$

अतः $a^2 - 2ab + b^2$ का गुणनखण्ड $(a - b)$ तथा $(a - b)$ है।

द्वितीय विधि—समूह बनाकर

व्यंजक $a^2 - 2ab + b^2$ का गुणनखण्ड समूह बनाकर भी ज्ञात कर सकते हैं।

$$a^2 - 2ab + b^2 = a^2 - ab - ab + b^2$$
$$= (a^2 - ab) - (ab - b^2)$$
$$= a(a - b) - b(a - b)$$
$$= (a - b)(a - b)$$

अतः $a^2 - 2ab + b^2$ के गुणनखण्ड $(a - b)$ तथा $(a - b)$ है।

उदाहरण 15. $x^2 - 24x + 144$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : (i) सर्वसमिका के प्रयोग द्वारा–

$$x^2 - 24x + 144 = x^2 - 2 \times x \times 12 + (12)^2$$
$$= (x - 12)^2$$
$$= (x - 12)(x - 12)$$

अतः $x^2 - 24x + 144$ का गुणनखण्ड $(x - 12)$ तथा $(x - 12)$ है।

(ii) समूह विधि द्वारा–

$$x^2 - 24x + 144 = x^2 - 12x - 12x + 144$$
$$= (x^2 - 12x) - (12x - 144)$$
$$= x(x - 12) - 12(x - 12)$$
$$= (x - 12)(x - 12)$$

अतः $x^2 - 24x + 144$ का गुणनखण्ड $(x - 12)$ तथा $(x - 12)$ है।

उदाहरण 16. $4x^2 - 12xy + 9y^2$ के गुणनखण्ड कीजिए।

हल : (i) सर्वसमिका के प्रयोग द्वारा—

$4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x)^2 - 2. (2x) . (3y) + (3y)^2.$

जो $a^2 - 2ab + b^2$ के रूप का है। अतः सूत्र के $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ के अनुसार

$$\begin{aligned} 4x^2 - 12xy + 9y^2 &= (2x)^2 - 2. (2x). (3y) + (3y)^2 \\ &= (2x - 3y)^2 \\ &= (2x - 3y) (2x - 3y) \end{aligned}$$

इस प्रकार व्यंजक के दो गुणनखण्ड $(2x - 3y)$ तथा $(2x - 3y)$ है।

(ii) समूह विधि द्वारा—

$$\begin{aligned} 4x^2 - 12xy + 9y^2 &= 4x^2 - 6xy - 6xy + 9y^2 \\ &= (4x^2 - 6xy) - (6xy - 9y^2) \\ &= 2x (2x - 3y) - 3y (2x - 3y) \\ &= (2x - 3y) (2x - 3y) \end{aligned}$$

अतः $4x^2 - 12xy + 9y^2$ का गुणनखण्ड $(2x - 3y)$ तथा $(2x - 3y)$ है।

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि $a^2 - 2ab + b^2$ प्रकार के व्यंजकों का गुणनखण्ड प्रत्येक विधि से (सर्वसमिका का प्रयोग तथा समूह बनाकर) $(a - b)$ तथा $(a - b)$ है।

(7) $x^2 + bx + c$ प्रकार के व्यंजकों के गुणनखण्ड

आइए, अब चर्चा करें कि हम एक चर वाले व्यंजकों, जैसे $x^2 + 8x + 12$, $x^2 - x - 6$, $y^2 + 2y - 15$, इत्यादि के गुणनखण्ड किस प्रकार कर सकते हैं। ध्यान दीजिए कि ये व्यंजक $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ तथा $(a^2 - b^2)$ के प्रकार के नहीं है। परन्तु यह व्यंजक $x^2 + (a + b) x + ab$ के रूप का है। अतः $x^2 + bx + c$ प्रकार के व्यंजक का गुणनखण्ड सर्वसमिका $x^2 + (a + b) x + ab = (x + a) (x + b)$ की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं।

व्यंजक $x^2 + bx + c$ के प्रकार के बीजीय व्यंजक के गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए, हम c (अर्थात अचर पद) के दो गुणनखण्ड m और n इस प्रकार ज्ञात करते हैं कि

$mn = c$ और $m + n = b$ हो।

तब इस व्यंजक को निम्नांकित रूप से लिखते हैं—

$$\begin{aligned} x^2 + bx + c &= x^2 + (m + n) x + mn \\ &= x^2 + mx + nx + mn \\ &= (x^2 + mx) + (nx + mn) \\ &= x (x + m) + n (x + m) \\ &= (x + m) (x + n) \text{ जो कि वांछित गुणनखण्ड है।} \end{aligned}$$

उदाहरण 17. $x^2 + 6x + 8$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : व्यंजक $x^2 + 6x + 8$ का गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए अचर पद 8 के ऐसे दो गुणनखण्ड निकालते हैं जिन्हें गुणा करने पर 8 तथा जोड़ने पर 6 आए। अतः हम देखते हैं कि 8 $= 4 \times 2$ और $4 + 2 = 6$ है।

इसलिए
$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 8 &= x^2 + (4 + 2)\, x + 4 \times 2 \\ &= x^2 + 4x + 2x + 4 \times 2 \\ &= (x^2 + 4x) + (2x + 4 \times 2) \\ &= x\,(x + 4) + 2\,(x + 4) \\ &= (x + 4)\,(x + 2) \end{aligned}$$

अतः $x^2 + 6x + 8$ के दो गुणनखण्ड $(x + 4)$ तथा $(x + 2)$ हैं।

उदाहरण 18. $y^2 - 4y - 12$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : व्यंजक $y^2 - 4y - 12$ की तुलना $\{x^2 + (a + b)\, x + ab\}$ से करने पर $a + b = -4$ तथा $ab = -12$

चूँकि $ab = -12$ से स्पष्ट है कि a और b में से एक ऋणात्मक है तथा $a + b = -4$ का अर्थ है कि बड़े संख्यात्मक मान वाला ऋणात्मक है। अतः दोनों सम्बन्धों को सन्तुष्ट करने के लिए अचर पद 12 के दो गुणनखण्ड 2 व -6 होंगे। अतः -12 के दो गुणनखण्ड -6 और 2 है। अतः इस प्रकार हम देखते हैं कि :

$ab = -12 = -6 \times 2;\ a + b = -4 = -6 + 2$

अतः
$$\begin{aligned} y^2 - 4y - 12 &= y^2 - 6y + 2y - 12 \\ &= (y^2 - 6y) + (2y - 12) \\ &= y\,(y - 6) + 2\,(y - 6) \\ &= (y - 6)\,(y + 2) \end{aligned}$$

अतः $y^2 - 4y - 12$ के गुणनखण्ड $(y - 6)$ तथा $(y + 2)$ है।

(8) $ax^2 + bx + c$ प्रकार के व्यंजकों के गुणनखण्ड

अब तक आप प्रशिक्षुओं ने $x^2 + bx + c$ प्रकार के त्रिपदीय व्यंजकों के गुणनखण्ड करना सीखा है। अब आप $ax^2 + bx + c$ प्रकार के व्यंजक का गुणनखण्ड ज्ञात करना सीखेंगे।

दोनों प्रकार के व्यंजकों में क्या अन्तर है?

दोनों प्रकार के व्यंजकों की तुलना करने पर स्पष्ट है कि $ax^2 + bx + c$ में x^2 का गुणांक a है जबकि $x^2 + bx + c$ में x^2 का गुणांक 1 है।

अतः $ax^2 + bx + c$ का गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए ऐसी दो संख्यायें m और n प्राप्त करते हैं कि $m + n = b$ तथा $mn = ac$

इस प्रकार m और n संख्यायें ज्ञात करके व्यंजक $ax^2 + bx + c$ का गुणनखण्ड व्यंजक $x^2 + bx + c$ के तरीके से ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 19. $2x^2 + 13x + 15$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : $2x^2 + 13x + 15$ के गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए ऐसी दो संख्याएँ m तथा n ज्ञात करना है कि

$m + n = 13$ तथा $mn = 2 \times 15 = 30$

स्पष्टतः $m = 10$ तथा $n = 3$ उपयुक्त संख्याएँ हैं।

अतः
$$\begin{aligned} 2x^2 + 13x + 15 &= 2x^2 + (10 + 3)\ x + 15 \\ &= 2x^2 + 10x + 3x + 15 \\ &= (2x^2 + 10x) + (3x + 15) \\ &= 2x\ (x + 5) + 3\ (x + 5) \\ &= (x + 5)\ (2x + 3) \end{aligned}$$

इस प्रकार $(x + 5)$ तथा $(2x + 3)$ व्यंजक $2x^2 + 13x + 15$ के दो गुणनखण्ड है।

उदाहरण 20. $3x^2 + 7x - 6$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल : $3x^2 + 7x - 6$ के गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए ऐसी दो संख्या m तथा n चाहिए कि :

$m + n = 7$ तथा $mn = 3 \times -6 = -18$

चूँकि $9 + (-2) = 7$ तथा $9 \times (-2) = -18$

अतः $m = 9$ और $n = -2$ उपयुक्त संख्याएँ हैं।

इस प्रकार
$$\begin{aligned} 3x^2 + 7x - 6 &= 3x^2 + \{9 + (-2)\}x - 6 \\ &= 3x^2 + \{9 + (-2)\}x - 6 \\ &= 3x^2 + 9x - 2x - 6 \\ &= (3x^2 + 9x) - (2x + 6) \\ &= 3x\ (x + 3) - 2\ (x + 3) \\ &= (x + 3)\ (3x - 2) \end{aligned}$$

अतः $3x^2 + 7x - 6$ के गुणनखण्ड $(x + 3)$ तथा $(3x - 2)$ है।

मूल्यांकन

1. $3xy + 9y$ का गुणनखण्ड है—

   (i) $3x$ (ii) $3xy$

   (iii) $3y(x + 3)$ (iv) $3x(y + 3)$

2. $100^2 - 10^2$ का मान है—

   (i) 110 (ii) 90

   (iii) 1000 (iv) 9900

3. $(1 - x^2)$ का एक गुणनखण्ड है—

   (i) $(1 - x)$ (ii) $(x - 1)$

   (iii) $x + 2$ (iv) इनमें से कोई नहीं

4. $64a^2 - 225b^2$ का गुणनखण्ड है—

   (i) $(8a + 15b)(8a - 15b)$ (ii) $(15a + 8b)(8a - 15b)$

   (iii) $(8a + 15b)(15a - 8b)$ (iv) इनमें से कोई नहीं

5. $25x^2 - 30xy + 9y^2$ का गुणखण्ड है—

   (i) $(5x + 3y)(5x - 3y)$ (ii) $(5x - 3y)^2$

   (iii) $(3x - 5y)^2$ (iv) $(5x + 3y)^2$

6. $27a^2b + 18ab^2$ के गुणनखण्ड कीजिए।

7. $18x^3 + 12x^4 - 10x^2$ का गुणनखण्ड कीजिए।

8. $p(p - 1) + 2(p - 1) + x(p - 1)$ का गुणनखण्ड कीजिए।

9. $a^3 - a^2 - ab + a + b - 1$ का गुणनखण्ड कीजिए।

10. $x^2 + 3x + \frac{9}{4}$ का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

11. $x^2 - 12xy + 36y^2$ का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

12. निम्नलिखित को गुणनखण्ड की सहायता से सरल कीजिए—

    (i) $\frac{4x - 4y}{7y - 7x}$ (ii) $\frac{a^2b + b^2a}{a + b}$

    (iii) $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$ (iv) $\frac{3x^2 - 3y^2}{4x + 4y}$

13. निम्नलिखित के मान गुणनखण्ड की सहायता से ज्ञात कीजिए—

(i) $101 \times 55 + 99 \times 55$ (ii) $7 \times 45 + 9 \times 7 + 14 \times 18$

14. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड कीजिए—

(i) $9x^2 + 6x + 1$ (ii) $x^2 + 3x + \frac{9}{4}$ (iii) $36 + 12x + x^2$

15. निम्नांकित के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए—

(i) $x^3 - 144x$ (ii) $9a^2 - \frac{25}{9a^2}$

(iii) $(a + b)^2 - (a - b)^2$

(iv) $x^4 - 625$ (v) $16a^4 - 81b^4$

(vi) $25\ (a - 5b)^2 - 4\ (a - 3b)^2$

16. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड कीजिए—

(i) $x^2 - 18x + 65$ (ii) $3x^5 - 18x^4 - 48\ x^3$

(iii) $a^2\ b^2 - 3ab - 18$ (iv) $2x^2 + 7x + 5$

(v) $12x^3 - 14x^2 - 10x$.

———

इकाई-12

बीजगणितीय व्यंजकों में एकपदीय तथा द्विपदीय व्यंजकों से भाग

इस इकाई के अध्ययन से निम्नलिखित बिन्दुओं की जानकारी होगी—

(i) एकपदी का एक अन्य एकपदी से भाग

(ii) एक बहुपद का एक एकपदी से भाग

(iii) बहुपद का बहुपद से विभाजन

(iv) बहुपद का द्विपदीय व्यंजक से विभाजन

प्रशिक्षु बीजीय व्यंजकों के जोड़, घटाने एवं गुणा से पूर्व परिचित हैं। इस इकाई में आप लोग बीजीय व्यंजकों को एक पदीय तथा द्विपदीय व्यंजकों से विभाजन की प्रक्रिया से परिचित होंगे।

आप लोग जानते हैं कि विभाजन, गुणन की प्रतिलोम संक्रिया है। इस प्रकार $4 \times 3 = 12$ से $12 \div 3 = 4$ या $12 \div 4 = 3$ प्राप्त होता है।

यही हम बीजीय व्यंजकों के विभाजन (या भाग देने) के लिए भी कर सकते हैं। उदाहरणार्थ,

(i) $3x \times 5x^3 = 15x^4$

अतः $15x^4 \div 3x = 5x^3$

या $15x^4 \div 5x^3 = 3x$

(ii) $6y\ (y + 7) = 6y^2 + 42y$

अतः $(6y^2 + 42y) \div 6y = y + 7$

या $(6y^2 + 42y) \div (y + 7) = 6y$

अब हम ध्यानपूर्वक देखेंगे कि एक व्यंजक को अन्य व्यंजक से किस प्रकार विभाजित किया जा सकता है।

(i) एकपदी का एक अन्य एकपदी से विभाजन

(a) $8x^3 \div 2x$ पर विचार कीजिए।

हम $8x^3$ और $2x$ को गुणनखण्ड के रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं :

$8x^3 = 2 \times 2 \times 2 \times x \times x \times x$

$2x = 2 \times x$

अब हम $8x^3$ के गुणनखण्डों के समूह बनाते हैं।

$8x^3 = 2 \times x\ (2 \times 2 \times x \times x) = 2x \times 4x^2$

इस प्रकार $8x^3 \div 2x = 4x^2$

उपर्युक्त विभाजन को इस प्रकार से भी हल कर सकते हैं।

$$8x^3 \div 2x = \frac{8x^3}{2x}$$
$$= \frac{2 \times 2 \times 2 \times x \times x \times x}{2 \times x}$$
$$= 2 \times 2 \times x \times x$$
$$= 4x^2$$

(b) आइए अब एक पद $15\ x^2y^3$ में एक पद $-3xy$ से भाग देने की क्रिया को सीखेंगे।

चूँकि $15\ x^2y^3 = (-\ 3xy) \times (-5xy^2)$

अतः $15x^2y^3 \div (-3xy) = -\ 5xy^2$

अर्थात् $\dfrac{15x^2y^3}{-3xy} = -5xy^2$

ध्यान दें, $\dfrac{15}{-3} = -5$ और $\dfrac{x^2y^3}{xy} = xy^2$

इस प्रकार एक पद में एक पद से भाग देते समय निम्नांकित नियमों की सहायता लेते हैं—

1. दो एकपदीय व्यंजकों के भागफल का गुणांक, उन व्यंजकों के गुणांकों का भागफल होता है।

उदाहरणार्थ, उपर्युक्त में $\dfrac{15}{-3} = -5$ तथा $\dfrac{8}{2} = 4$

2. दो एकपदीय व्यंजकों के भागफल का चर अंश उन एकपदीय व्यंजकों के चर अंशों का भागफल होता है। उदाहरणार्थ उपर्युक्त में $\dfrac{x^2y^3}{xy} = xy^2$ तथा $\dfrac{x^3}{x} = x^2$

प्रयास कीजिए—

उदाहरण 1. निम्नलिखित विभाजन कीजिए–

(i) $-20x^5 \div 4x$ (ii) $24a^3b^2 \div 3a^2b$

(iii) $7x^2y^2z^2 \div 14xy$ (iv) $42x^6y^3 \div -7x^2y^2$

(v) $-32p^3q^4 \div (-8\ pq^2)$

(ii) एक बहुपद में एकपदी से भाग

आइए एक त्रिपद $21x^2 + 24x^3 - 9x$ में एकपदीय व्यंजक $3x$ से भाग पर विचार करें। इस भाग की क्रिया को निम्नांकित दो प्रक्रमों में करते हैं।

प्रक्रम 1— भाज्य के पदों को घातों के अवरोही क्रम में पुनर्व्यवस्थित करते हैं, जैसे–

भाज्य $= 21x^2 + 24x^3 - 9x$

$= 24x^3 + 21x^2 - 9x$

प्रक्रम 2— अब बहुपद के प्रत्येक पद को दिये गये एकपदी व्यंजक $3x$ से नियमानुसार भाग देते हैं। इस प्रकार हम देखते हैं कि :

$$24x^3 + 21x^2 - 9x \div 3x = \frac{24x^3}{3x} + \frac{21x^2}{3x} - \frac{9x}{3x}$$
$$= 8x^2 + 7x - 3$$

टिप्पणी : भाजक के एकपदी होने की दशा में भाज्य को अवरोही क्रम में व्यवस्थित किये बिना भी प्रक्रम 2 के अनुसार भाग दिया जा सकता है। भाग देने पर प्रत्येक दशा में भागफल समान होगा। विचार करके इसका सत्यापन करिये।

प्रयास कीजिए :

उदाहरण 2. निम्नलिखित का भागफल ज्ञात कीजिए—

(i) $8x^2 + 20x^4 - 12x^3 \div 4x^2$ (ii) $32\ (x^2yz + xy^2z + xyz^2) \div 8xyz$

(iii) $5x^4 + 15x^2 - 4x \div 5x$(iv) $4x^5 + 5x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x \div (-2x)$

(iii) बहुपद का बहुपद से विभाजन

बहुपद व्यंजक $55\ (x^4 - 5x^3 - 24x^2)$ को बहुपद $11x\ (x - 8)$ से भाग देने पर विचार कीजिए। बहुपद व्यंजक $55\ (x^4 - 5x^3 - 24x^2)$ के गुणनखण्ड करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$55\ (x^4 - 5x^3 - 24x^2) = 5 \times 11 \times x^2\ (x^2 - 5x - 24)$

$= 5 \times 11 \times x^2\ [x^2 - 8x + 3x - 24]$

$= 5 \times 11 \times x^2\ [(x^2 - 8x) + (3x - 24)]$

$= 5 \times 11 \times x^2 \; [x \; (x - 8) + 3 \; (x - 8)]$

$= 5 \times 11 \times x^2 \; (x - 8) \; (x + 3)$

अतः $$55(x^4 - 5x^3 - 24x^2) \div 11x(x-8) = \frac{5 \times 11 \times x^2 (x-8)(x+3)}{11x(x-8)}$$
$$= 5 \times x \times (x+3)$$
$$= 5x(x+3)$$

आइये अब निम्नलिखित उदाहरण द्वारा उपरोक्त क्रिया को और स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 3. निम्नलिखित का विभाजन कीजिए—

(i) $24 \; (x^3 - 7x^2 + 12x) \div 8x \; (x - 3)$

(ii) $25x \; (3x^6 - 13x^5 + 4x^4) \div 5x^2 \; (x - 4)$

(iii) $44 \; (x^4 - 5x^3 - 24x^2) \div 44x \; (x + 3)$

हल: (i) $24 \; (x^3 - 7x^2 + 12x) \div 8x \; (x - 3)$

भाज्य $= 24 \; (x^3 - 7x^2 + 12x)$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x \; (x^2 - 7x + 12)$

(24 के गुणनखण्ड तथा कोष्ठक में से सार्वगुणनखण्ड x बाहर करने पर)

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x \; [x^2 - 4x - 3x + 12]$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x \; [(x^2 - 4x) - (3x - 12)]$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x \; [x \; (x - 4) - 3 \; (x - 4)]$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x \; (x - 4) \; (x - 3)$

अतः $24 \; (x^3 - 7x^2 + 12x) \div 8x \; (x - 3)$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x \; (x - 4) \; (x - 3) \div 8x \; (x - 3)$

$$= \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x(x-4)(x-3)}{8x(x-3)}$$
$$= 3(x-4)$$

(ii) $$\frac{25x(3x^6 - 13x^5 + 4x^4)}{5x^2(x-4)} = \frac{5 \times 5 \times x \times x^4 (3x^2 - 13x + 4)}{5 \times x^2 \times (x-4)}$$
$$= \frac{5 \times 5 \times x \times x^4 [3x^2 - 12x - x + 4]}{5 \times x^2 \times (x-4)}$$

$$= \frac{5 \times 5 \times x \times x^4[(3x^2 - 12x) - (x-4)]}{5 \times x^2 \times (x-4)}$$

$$= \frac{5 \times 5 \times x \times x^4[3x(x-4) - 1(x-4)]}{5 \times x^2 \times (x-4)}$$

$$= \frac{5 \times 5 \times x \times x^4(x-4)(3x-1)}{5 \times x^2 \times (x-4)}$$

$$= 5x^3(3x-1)$$

(iii) $$\frac{44(x^4 - 5x^3 - 24x^2)}{44x(x+3)} = \frac{44 \times x^2(x^2 - 5x - 24)}{44x(x+3)}$$

$$= \frac{44 \times x^2[x^2 - 8x + 3x - 24]}{44 \times x \times (x+3)}$$

$$= \frac{44 \times x^2 \times [(x^2 - 8x) + (3x - 24)]}{44 \times x \times (x+3)}$$

$$= \frac{44 \times x^2 \times [x(x-8) + 3(x-8)]}{44 \times x \times (x+3)}$$

$$= \frac{44 \times x^2 \times (x-8)(x+3)}{44 \times x \times (x+3)}$$

$$= x(x-8)$$

(iv) बहुपद में द्विपद से भाग

प्रथम स्थिति : शून्य शेषफल

अब हम लोग बहुपद $2x^4 + 7x^2 + 8x^3 + 4x + 3$ में द्विपद $(x + 3)$ से भाग देने पर विचार करेंगे तथा भागफल एवं शेषफल पर भी चर्चा करेंगे।

बहुपद $2x^4 + 7x^2 + 8x^3 + 4x + 3$ में द्विपद $(x + 3)$ से भाग करने के क्रियापद निम्नांकित हैं—

(i) भाज्य तथा भाजक के पदों को x (चर) के अवरोही घात के क्रम में लिखते हैं। तद्नुसार भाज्य $2x^4 + 7x^2 + 8x^3 + 4x + 3$ को $2x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 4x + 3$ तथा भाजक $(x + 3)$ को यथावत् $(x + 3)$ लिखा जायेगा।

(ii) भाजक $x + 3$ के प्रथम पद x से भाज्य के प्रथम पद $2x^4$ में भाग देते हैं। इस प्रकार $2x^4 \div x = 2x^3$ भागफल का प्रथम पद है।

(iii) अब भाजक $(x + 3)$ में भागफल के प्रथम पद $2x^3$ से गुणा करके गुणनफल $(x + 3) \times 2x^3 = 2x^4 + 6x^3$ को भाज्य में से घटाते हैं। इस प्रकार

$2x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 4x + 3 - 2x^4 - 6x^3 = 2x^3 + 7x^2 + 4x + 3$

(iv) शेष $2x^3 + 7x^2 + 4x + 3$ को नवीन भाज्य के रूप में लेकर भाजक $(x + 3)$ से भाग करते हैं। नवीन भाज्य के प्रथम पद में पुनः उपरोक्त क्रिया step (ii) व Step (iii) दोहराते हैं।

उपर्युक्त क्रियापदों को समग्र रूप से निम्नांकित ढंग से प्रदर्शित करते हैं।

$$
\begin{array}{l}
x+3)\,2x^4+8x^3+7x^2+4x+3\,(\,2x^3+2x^2+x+1 \\
\quad \underline{2x^4+6x^3} \\
\quad\quad 2x^3+7x^2+4x+3 \\
\quad \underline{-2x^3 \pm 6x^3} \\
\quad\quad\quad x^2+4x+3 \\
\quad\quad \underline{-x^2 \pm 3x} \\
\quad\quad\quad x+3 \\
\quad\quad\quad \underline{-x \pm 3} \\
\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

इस प्रकार उपरोक्त क्रियाविधि में आपने देखा कि बहुपद $2x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 4x + 3$ को द्विपद $(x + 3)$ से भाग देने पर भागफल $2x^3 + 2x^2 + x + 1$ तथा शेषफल शून्य प्राप्त होता है।

इस प्रकार विचार करके बताइये कि ऐसा विभाजन जिसमें शेषफल शून्य प्राप्त होता है, भाज्य भाजक तथा भागफल में क्या सम्बन्ध होगा?

ध्यान देने योग्य बिन्दु :

यदि एक बहुपद (भाज्य) में दूसरे बहुपद (भाजक) से भाग करने पर शेषफल शून्य प्राप्त हो, तो इस प्रकार भाजक तथा प्राप्त भागफल, भाज्य के गुणनखण्ड होते हैं।

उदाहरण 4. $10x^3 - 39x^3 + 41x - 15$ में $(2x - 5)$ से भाग दीजिए।

हल : भाज्य $= 10\,x^3 - 39x^2 + 41x - 15$

भाजक $= 2x - 5$

$$
\begin{array}{l}
2x-5)\,10x^3-39x^2+41x-15\,(\,5x^2-7x+3 \\
\quad\quad 10x^3-25x^2 \\
\quad\quad \underline{-\quad\quad +} \\
\quad -14x^2+41x-15
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
-14x^2+41x-15 \\
-14x^2+35x \\
+ \quad\quad - \\
\hline
\quad 6x-15 \\
\quad 6x-15 \\
\quad - \quad + \\
\hline
\quad\quad 0
\end{array}
$$

अतः भागफल $= 5x^2 - 7x + 3$

शेषफल $= 0$

चूँकि शेषफल शून्य है। इसलिए भाजक $(2x - 5)$ तथा भागफल $5x^2 - 7x + 3$ भाज्य $10x^3 - 39x^2 + 41x - 15$ का गुणनखण्ड होगा।

अतः भाज्य, भाजक तथा भागफल में निम्नलिखित सम्बन्ध है—

भाज्य = भाजक × भागफल

द्वितीय स्थिति : शून्येत्तर शेषफल

उपर्युक्त उदाहरण में भाग की क्रियाओं में शेषफल शून्य प्राप्त होता है। ऐसी स्थिति में आप देखते हैं कि भाज्य, भाजक से पूर्णतः विभाज्य है। अब हम लोग ऐसी स्थितियों पर विचार करेंगे जिनमें शेषफल शून्य न हो। ऐसी स्थिति में भाग की क्रिया तब तक जारी रखते हैं, जब तक कि शेषफल, भाजक से कम घातांक का बहुपद नहीं हो जाता है। आइये, बहुपद $15x^3 - 20x^2 + 13x - 12$ में $3x - 6$ से भाग देने की प्रक्रिया पर विचार करेंगे।

भाज्य $= 15x^3 - 20x^2 + 13x - 12$

भाजक $= 3x - 6$

$$
\begin{array}{l}
3x-6\big)\,15x^3-20x^2+13x-12\,\Big(5x^2+\dfrac{10}{3}x+11 \\
\quad\quad -15x^3-30x^2 \\
\quad\quad\quad\quad + \\
\hline
\quad\quad 10x^2+13x-12 \\
\quad\quad 10x^2-20x \\
\quad\quad - \quad + \\
\hline
\quad\quad 33x-12 \\
\quad\quad 33x-66 \\
\quad\quad - \quad + \\
\hline
\quad\quad\quad 54
\end{array}
$$

भागफल $= 5x^2 + \dfrac{10}{3}x + 11$

शेषफल $= 54$

उपरोक्त भाग की क्रिया से प्राप्त भागफल, शेषफल, भाजक एवं भाज्य में सम्बन्ध ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 5. $9x^3 - 45x^2 + 71x - 40$ में $(3x - 8)$ से भाग देकर भागफल तथा शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल :

$$
\begin{array}{l}
3x-8 \overline{)\, 9x^3 - 45x^2 + 71x - 40 \,} \left(3x^2 - 7x + 5\right. \\
\quad 9x^3 - 24x^2 \\
\quad - \quad + \\
\hline
\quad -21x^2 + 71x - 40 \\
\quad -21x^2 + 56x \\
\quad + \quad - \\
\hline
\qquad 15x - 40 \\
\qquad 15x - 40 \\
\qquad - \quad + \\
\hline
\qquad 0 \\
\hline
\end{array}
$$

भागफल $= 3x^2 - 7x + 5$

शेषफल $= 0$

उदाहरण 6. $15x^4 - 16x^3 + 9x^2 - \frac{10}{3}x + 6$ में $(3x - 2)$ से भाग देकर, भाज्य, भाजक, भागफल तथा शेषफल में सम्बन्ध ज्ञात कीजिए।

हल :

$$
\begin{array}{l}
3x-2 \overline{)\, 15x^4 - 16x^3 + 9x^2 - \frac{10}{3}x + 6 \,} \left(5x^3 - 2x^2 + \frac{5}{3}x\right. \\
\quad 15x^4 - 10x^3 \\
\quad - \quad + \\
\hline
\qquad -6x^3 + 9x^2 - \frac{10}{3}x + 6 \\
\qquad -6x^3 + 4x^2 \\
\qquad + \quad - \\
\hline
\qquad\quad 5x^2 - \frac{10}{3}x + 6 \\
\qquad\quad 5x^2 - \frac{10}{3}x \\
\qquad\quad - \quad + \\
\hline
\qquad\qquad 6 \\
\hline
\end{array}
$$

उपर्युक्त भाग में $15x^4 - 16x^3 + 9x^2 - \frac{10}{3}x + 6$ भाज्य, $(3x - 2)$ भाजक, $5x^3 - 2x^2 + \frac{5}{3}x$ भागफल तथा 6 शेषफल है।

$$\text{भाजक} \times \text{भागफल} = (3x-2)\left(5x^3 - 2x^2 + \frac{5}{3}x\right)$$
$$= 15x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 10x^3 + 4x^2 - \frac{10}{3}x$$
$$= 15x^4 - 16x^3 + 9x^2 - \frac{10}{3}x$$

भाजक × भागफल + शेषफल $= 15x^4 - 16x^3 + 9x^2 - \frac{10}{3}x + 6 =$ भाज्य

इस प्रकार भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

मूल्यांकन

1. $x^2 + 2x + 3$ में $(x + 1)$ से भाग देने पर शेषफल होगा—

   (i) 2 (ii) -2

   (iii) 4 (iv) 0

2. $x^4 + 3x^2 + x$ में x से भाग देने पर भागफल होगा—

   (i) $x^3 + 3x + 1$ (ii) $x^3 + 1$

   (iii) $x^3 + 3x + 2$ (iv) $x^3 + 2x + 1$

3. $25x^3 y^5$ में $5xy$ से भाग देने पर भागफल है—

   (i) $25x^4y^4$ (ii) $5x^2y^4$

   (iii) $5x^4y^2$ (iv) $5x^4y^6$

4. निम्नलिखित विभाजन कीजिए—

   (i) $28x^4 \div 84x$ (ii) $12a^8b^8 \div (-6\ a^6\ b^4)$

   (iii) $77\ p^2q^2r^2 \div 11\ pqr^2$ (iv) $34x^3y^4z^4 \div 51x^2y^2z^2$

5. निम्नलिखित विभाजन कीजिए—

   (i) $9x^2y^2\ (3z - 24) \div 27xy\ (z - 8)$

(ii) $10y\ (6y + 21) \div 5\ (2y + 7)$

(iii) $96\ abc\ (3a - 12)\ (5b - 30) \div 108\ (a - 4)\ (b - 6)$

(iv) $z\ (5z^2 - 80) \div 5z\ (z + 4)$

6. निम्नलिखित को निर्देशानुसार भाग दीजिए—

(i) $52xyz\ (x + y)\ (y + z)\ (x + z) \div 26.xy\ (y + z)\ (x + z)$

(ii) $20\ (x + 4)\ (x^2 + 5x + 3) \div 5\ (x + 4)$

7. निम्नलिखित विभाजन कीजिए—

(i) $9x^5 + 12x^4 - 6x^2 \div 3x^2 + 2x$

(ii) $x^5 + y^5 \div (x + y)$

(iii) $3x^3 + 4x^2 + 5x + 18 \div (x + 2)$

8. निम्नांकित प्रश्नों में भाग देकर भाज्य, भाजक, भागफल तथा शेषफल को सारणी में लिखिए :

(i) $6x^5 - 28x^3 + 3x^2 + 30x - 9$ में $(2x^2 - 6)$ से

(ii) $21x^2 + 15x - 20$ में $3x - 4$ से

(iii) $34x - 22x^3 - 12x^4 - 10x^2 - 75$ में $(3x + 7)$ से

(iv) $x^2 + 7x + 14$ में $(x + 3)$ से

9. प्रश्न 8 में प्राप्त सारणी की सहायता से प्रत्येक प्रश्न के लिए सत्यापन कीजिए कि:

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

10. भाग संक्रिया द्वारा ज्ञात कीजिए कि क्या :

(i) $(x + 6)$; $x^2 - x - 42$ का एक गुणनखण्ड है?

(ii) $x^2 + 3$; $x^5 - 9x$ का एक गुणनखण्ड है?

(iii)$y - 4$; $y\ (5y^2 - 80)$ का एक गुणनखण्ड है?

(iv)$(4x - 3)$, $4x^2 - 13x - 12$ का एक गुणनखण्ड है?

(v)$(3x - 6)$, $15x^3 - 20x^2 + 13x - 12$ का एक गुणनखण्ड है?

———

इकाई-13
अवर्गीकृत आँकड़ों के माध्य

इस इकाई के अध्ययन से निम्नलिखित की जानकारी होगी—

(i) आँकड़ों की केन्द्रीय प्रवृत्ति और प्रकार

(ii) समान्तर माध्य

(iii) अवर्गीकृत आँकड़ों से समान्तर माध्य की गणना (जब बारंबारता नहीं दी गई हो)।

(iv) अवर्गीकृत आँकड़ों का समान्तर माध्य ज्ञात करना जबकि पदों की बारंबारता दी गई हो।

प्रशिक्षु आँकड़ों को एकत्रित करना, उनको सारणीबद्ध करना तथा उन्हें दंड आलेखों के रूप में प्रदर्शित करने से परिचित हो चुके हैं। आँकड़ों का संग्रह, आलेखन और प्रस्तुतीकरण हमारे अनुभवों को संगठित करने और उनसे निष्कर्ष निकालने में हमारी सहायता करते हैं। प्रायः आप लोग समाचार-पत्रों, पत्रिकाओं, टेलीविजन तथा आस-पास निम्नांकित प्रकार की बातें सुनते और कहते रहते हैं—

(i) कक्षा में 6 छात्रों की औसत ऊँचाई 140 सेमी है।

(ii) क्रिकेट मैच में खेले गये मैचों में खिलाड़ियों द्वारा बनाये गये रनों का औसत 60 है।

(iii) फैक्टरी के मजदूरों की औसत मासिक आय ` 5000 है।

(iv) हिन्दी के एक टेस्ट में विद्यार्थियों के अंको का औसत 65 है।

वास्तव में उपरोक्त कथनों में कक्षा के प्रत्येक छात्रों की ऊँचाई 140 सेमी, खिलाड़ी द्वारा प्रत्येक मैच में बनाये गये रन 60, फैक्टरी के प्रत्येक मजदूर की मासिक आय ` 5000 तथा हिन्दी के टेस्ट में प्रत्येक विद्यार्थियों का अंक 65 नहीं है।

(i) आँकड़ों की केन्द्रीय प्रवृत्ति और प्रकार

आपने देखा कि उपरोक्त कथनों में 'औसत' शब्द का प्रयोग हुआ है। जैसे क्रिकेट मैच में खेले गये मैचों में खिलाड़ियों द्वारा बनाये गये रनों का औसत 60 है। इसका तात्पर्य यह कदापि नहीं है कि प्रत्येक मैच में खिलाड़ी द्वारा बनाये गये रन 60 है। किसी मैच में खिलाड़ी ने 60 से अधिक रन बनाए और किसी में 60 से कम रन बनाए। वास्तव में यह सब प्रतिनिधि संख्याएँ हैं जो समूह की न तो न्यूनतम मान वाली संख्याएँ हैं और न तो अधिकतम मान वाली। निश्चित ही ऐसी संख्याएँ अपने समूह के मध्य या उसके आस-पास की संख्याएँ होती है।

इस प्रकार आपने देखा कि 'औसत' एक ऐसी संख्या है जो आँकड़ों के एक समूह की केन्द्रीय प्रवृत्ति को दर्शाती है, क्योंकि औसत सबसे अधिक तथा सबसे कम मूल्य के आँकड़ों के बीच में होती है। इसलिए औसत आँकड़ों के एक समूह की केन्द्रीय प्रवृत्ति का मापक है।

आँकड़ों में से किसी एक आँकड़े के आस-पास पाये जाने की उनकी प्रवृत्ति को केन्द्रीय प्रवृत्ति कहते हैं।

केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापें मुख्यतः तीन प्रकार की होती हैं :

(i) समांतर माध्य

(ii) माध्यिका या माध्यक

(iii) बहुलक

यहाँ पर हम लोग केवल समान्तर माध्य के बारे में चर्चा करेंगे।

(ii) समान्तर माध्य

आँकड़ों के एक समूह के लिए अधिकांशतः प्रयोग किए जाने वाला प्रतिनिधि मान समांतर माध्य है। संक्षेप में इसे माध्य भी कहते हैं।

उपरोक्त कथन को अच्छी प्रकार से समझने के लिए आइए एक उदाहरण की सहायता लेते है।

तीन बोरों में क्रमशः 50 किग्रा, 70 किग्रा तथा 90 किग्रा चावल हैं। यदि तीनों बोरों में बराबर चावल रखा जाए; तो प्रत्येक बोरे में कितना चावल होगा?

उपरोक्त स्थिति में प्रत्येक बोरे में बराबर चावल रखने के लिए स्पष्ट है कि हमें चावलों के मात्रा का माध्य निकालना पड़ेगा।

अतः समांतर माध्य = चावलों की कुल मात्रा/बोरों की संख्या

$$= \frac{50+70+90}{3}$$

$$= \frac{210}{3}$$

$$= 70 \text{ किग्रा}$$

इस प्रकार प्रत्येक बोरे में 70 किग्रा गेहूँ होगा।

अतः औसत या समान्तर माध्य या केवल माध्य वह मान है जो दिये हुए पदों के योगफल में पदों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है।

$\therefore$ समांतर माध्य = सभी पदों का योगफल/पदों की संख्या

(iii) अवर्गीकृत आँकड़ों से समान्तर माध्य की गणना (जब बारंबारता नहीं दी गयी)

यदि पदों का समूह $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ है जिसमें कुल पदों की संख्या n है, तो

समांतर माध्य $= \frac{x_1 + x_2 + x_3 ...... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

यहाँ Σ (सिग्मा), ग्रीक भाषा का एक अक्षर है जो योगफल का संकेत है।

उदाहरण 1. कक्षा 6 के 10 शिक्षार्थियों के भार (किग्रा) में क्रमशः 57, 43, 41, 39, 53, 49, 46, 46, 45 तथा 41 किग्रा है। उनके भार का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल : समान्तर माध्य = कुल पदों का योग/पदों की संख्या

$$= \frac{57 + 43 + 41 + 39 + 53 + 49 + 46 + 46 + 45 + 41}{10}$$

$$= \frac{460}{10}$$

$$= 46 \text{ किग्रा}$$

अतः शिक्षार्थियों के भार का समान्तर माध्य 46 किग्रा है।

(iv) अवर्गीकृत आँकड़ों से समान्तर माध्य की गणना (जब बारंबारता दी गयी हो)

अभी तक आपने उन अवर्गीकृत आँकड़ों का समान्तर माध्य ज्ञात किया जिसकी बारंबारता नहीं दी गई है। अब ऐसे अवर्गीकृत आँकड़ों का समान्तर माध्य ज्ञात करने की चर्चा करेंगे जिसकी बारंबारता दी गई है।

इस प्रकार के आँकड़ों का समान्तर माध्य हम निम्नलिखित चरणों द्वारा निकालते है—

(1) सबसे पहले प्रत्येक आँकड़ों व बारंबारता को सारणीबद्ध करके आँकड़ों को x तथा बारंबारता को f द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

(2) प्रत्येक पद में संगत बारंबारता से गुणा करते है।

(3) प्राप्त गुणनफल का योगफल ज्ञात करते हैं।

(4) बारंबारता का योगफल ज्ञात करते हैं।

(5) प्राप्त गुणनफलों के योगफल को बारंबारताओं के योगफल से भाग देते हैं। यही भागफल अभीष्ट समांतर माध्य है।

यदि समूह के पद $x_1, x_2, x_3 ... x_n$ हैं तथा उनकी संगत बांरबारता क्रमशः $f_1, f_2, f_3 \cdots f_n$ हैं तो

समांतर माध्य $= \frac{f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + f_3 \times x_3 + \ldots\ldots + f_n \times x_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots\ldots + f_n}$

$= \frac{\sum fx}{\sum f}$

उदाहरण 2. नीचे दी गई सारणी के आँकड़ों का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए—

पद	4	6	8	10	12	14
बारंबारता	3	4	2	2	6	8

हल :

पद x	बारंबारता f	$f \times x$
4	3	12
6	4	24
8	2	16
10	2	20
12	6	72
14	8	112
योग	25	256

समान्तर माध्य $= \frac{\sum fx}{\sum f}$

$= \frac{256}{25}$

$= 10.24$

सामूहिक चर्चा कीजिए :

1. 8 से 17 तक की प्राकृतिक संख्याओं का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए?
2. प्रथम पाँच सम प्राकृतिक संख्याओं का समांतर माध्य सम है या विषम?
3. यदि 2, 3 और A का समांतर माध्य 3 है, तो A का मान क्या होगा?

मूल्यांकन

1. 1 से 5 तक की संख्याओं का समांतर माध्य है—

   (i) 3 (ii) 2

   (iii) 15 (iv) 5

2. कक्षा 6 के छात्रों के प्राप्तांक क्रमशः 85, 73, 90, 64, 86 तथा 70 है। इनके प्राप्ताकों का समान्तर माध्य है—

   (i) 75 (ii) 78

   (iii) 76 (iv) 80

3. कक्षा 6 के 5 शिक्षार्थियों के भार (किग्रा में) क्रमशः 56, 42, 40, 38 व 52 है किग्रा है। उनके भार का समांतर माध्य है—

   (i) 45.6 किग्रा (ii) 45 किग्रा

   (iii) 44 किग्रा (iv) 40 किग्रा

4. यदि 3, 5, 6 और A का समांतर माध्य 5 है, तो A का मान है—

   (i) 5 (ii) 6

   (iii) 3 (iv) 4

5. किसी फैक्टरी के 10 मजदूरों की प्रतिदिन की मजदूरी क्रमशः 70, 110, 65, 80, 75, 85, 80, 76, 94 व 100 रूपये है। मजदूरों की मजदूरी का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

6. नीचे दी गई सारणी के आँकड़ों का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए—

पद	5	7	8	12	14	16
बारंबारता	4	5	4	3	8	6

7. किसी कक्षा के 8 शिक्षार्थियों ने गणित की परीक्षा में क्रमशः 40, 42, 45, 50, 55, 60, 64, 70 तथा 80 अंक प्राप्त किए। शिक्षार्थियों के प्राप्ताकों का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

8. 10 बालिकाओं के भार किग्रा में क्रमशः 41, 42, 43, 38, 35, 34, 42, 37, 40 तथा 36 किग्रा है। इनके भारों का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

9. निम्नलिखित सारणी में 50 बालकों का भार किलोग्राम में दिया हुआ है। उनके भार का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए—

भार (किग्रा में)	52	42	45	40	46
बारंबारता	4	12	18	10	6

10. निम्नलिखित बारंबारता बंटन का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए—

ऊँचाई (सेमी में)	142	143	144	145	146	147
बारंबारता	3	5	7	7	3	2

———

इकाई-14
आयतन एवं धारिता की संकल्पना तथा इकाइयाँ

यह इकाई बी.टी.सी. द्वितीय सेमेस्टर के इकाई संख्या-9 के पृष्ठ 55 से पृष्ठ 56 में सन्निहित है।

इकाई-15

घन, घनाभ की अवधारणा तथा इनका आयतन एवं सम्पूर्ण पृष्ठ

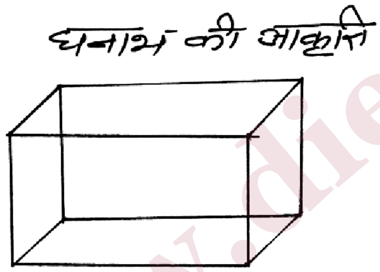
इस अध्याय में हम निम्नांकित बिन्दुओं की जानकारी प्राप्त करेंगेः

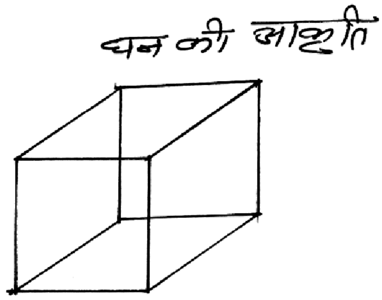
- घन, एवं घनाभ की अवधारणा
- घन एवं घनाभ का आयतन
- घन एवं घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ

शिक्षक प्रशिक्षु को माचिस की डिब्बी दिखाकर घनाभ की आकृति का ज्ञान करा सकते हैं साथ ही उन्हें बतायें कि आलमारी, सन्दूक इत्यादि भी घनाभ हैं। प्रशिक्षुओं से घनाभ आकृति की अन्य वस्तुओं की जानकारी देने को कहें।

शिक्षक प्रशिक्षुओं को लूडो के पासे को दिखाकर घन की आकृति का ज्ञान करा सकते हैं।

अतः घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई अलग-अलग माप की होती है तथा घन की लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई एक समान माप की होती है।





घनाभ और घन का आयतन

किसी भी वस्तु के द्वारा घेरे गये कुल स्थान की माप जिस भौतिक राशि के द्वारा की जाती है, उसे उस वस्तु का आयतन कहते हैं।

जिस प्रकार लम्बाई की इकाई सेमी या मीटर, क्षेत्रफल की इकाई वर्ग सेमी या वर्ग मीटर होती है, उसी प्रकार आयतन का मात्रक घन सेमी या घन मीटर होता है।

एक ऐसा घन जिसके प्रत्येक कोर की लम्बाई 1 सेमी है, तो उस घन द्वारा घेरे गये कुल स्थान की माप 1 घन सेमी आयतन के रूप में व्यक्त की जाती है।

अर्थात 1 घन सेमी आयतन, ऐसे घन का आयतन होता है, जिसके प्रत्येक कोर की लम्बाई 1 सेमी होती है।

प्रयास करें

1 घन मीटर आयतन का क्या अर्थ है?

विशेष :

1 घन मीटर = 1 मी^{2} × 1 मी

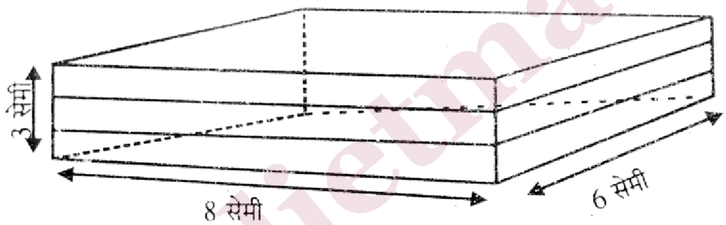
= 100 सेमी × 100 सेमी × 100 सेमी

= 1000000 घन सेमी = 10^6 घन सेमी

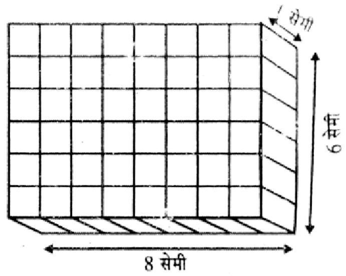
घन सेमी को सेमी^{3} भी लिखा जाता है, इसी प्रकार घन मीटर को मी^{3} लिखा जाता है।

क्रिया कलाप :

एक घनाभ के आकार का साबुन का टुकड़ा लीजिए, जिसकी लम्बाई 8 सेमी, चौड़ाई 6 सेमी व ऊँचाई 3 सेमी है। इसकी ऊँचाई को 3 बराबर भागों में बाँटिए। इनको किसी तेज चाकू से काटकर तीन पट्टियों को अलग कीजिए।



अब किसी पट्टी की लम्बाई को 8 समान भागों में बाँटकर पट्टियाँ प्राप्त कीजिए। इन आठ पट्टियों में प्रत्येक पट्टी को 6 समान भागों में बाँटिए। इस प्रकार प्राप्त घन सेमी के टुकड़ों को गिनिए।



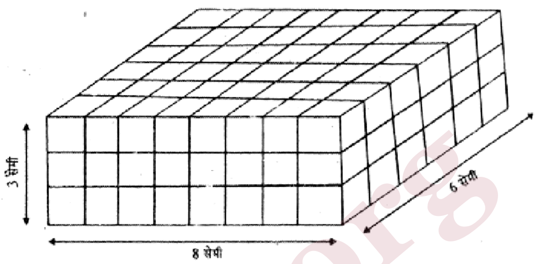
प्रयास करें :

1. एक पट्टी में कुल कितने टुकड़े प्राप्त हुए?
2. प्रत्येक टुकड़े की लम्बाई, चौड़ाई व ऊँचाई कितनी-कितनी है?
3. क्या प्रत्येक टुकड़े का आयतन घन के रूप में है?
4. साबुन के काटने पर कितनी पट्टियों प्राप्त होंगी?

हम देखेंगे कि कुल प्राप्त टुकड़े 48 है तथा प्रत्येक टुकड़े की लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई 1 सेमी है तथा प्रत्येक टुकड़ा घनाकार होगा।

क्या आप बता सकते हैं :

एक पट्टी का आयतन 1 सेमी कोर वाले कितने घनों के आयतन के बराबर होगा। एक पट्टी का आयतन कुल प्राप्त 48 घनाकार टुकड़ों के बराबर होगा अर्थात एक पट्टी का आयतन 48 घन सेमी के बराबर होगा।



यदि प्राप्त तीनों पट्टियों को एक दूसरे के ऊपर रखें तो हमें पुनः साबुन का टुकड़ा पार्श्व में प्रदर्शित प्रकार का प्राप्त होगा।

इस प्रकार :

साबुन का आयतन = 3 × एक पट्टी का आयतन

= 3 × 48 घन सेमी

= 144 घन सेमी

= 8 × 6 × 3 घन सेमी

= लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई

इस प्रकार हम निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि

घनाभ का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई

$= l \times b \times h$

जहाँ l = लम्बाई, b = चौड़ाई h = ऊँचाई

उपर्युक्त सूत्र की सहायता से साबुन या किसी घनाभ का आयतन उसे बिना काटे हुए ज्ञात किया जा सकता है।

घन के आयतन का सूत्र :

हम जानते हैं कि घन एक ऐसा घनाभ है, जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई परस्पर समान होती है। अतः घनाभ के आयतन के सूत्र में l, b, तथा h के स्थान पर घन की कोर (भुजा) a को प्रतिस्थापित करके घन के आयतन को ज्ञात करने का सूत्र प्राप्त कर सकते हैं।

इस प्रकार हम इस निष्कर्ष पहुँचते हैं कि :

घन का आयतन $= a \times a \times a = a^3$

जहाँ a = घन की एक भुजा

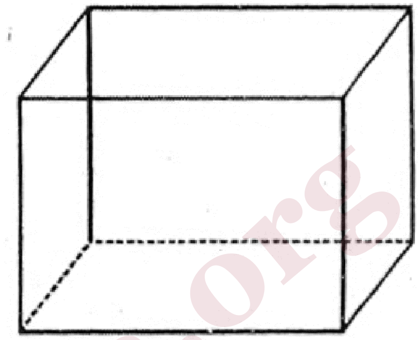
इन्हें भी जानिए :

एक घन जिसकी कोर 10 सेमी अर्थात 1 डेसी मी है, उसका आयतन कितना होगा?

घन का आयतन $= 10$ सेमी $\times$ 10 सेमी $\times$ 10 सेमी

$= 1000$ सेमी^{3} (1 घन डेसी मी)

$= 1$ लीटर



अतः 1000 घन सेमी आन्तरिक आयतन वाले बर्तन में जितना द्रव पदार्थ आता है, उसे 1 लीटर कहते है।

इस प्रकार

1 घन मी $=$ 1000000 घन सेमी

$=$ 1000 लीटर

इस प्रकार जिस बर्तन का आन्तरिक आयतन 1 घन मी होता है उसमें 1000 लीटर द्रव पदार्थ भरा जा सकता है।

प्रोजेक्ट कार्य

शिक्षक प्रशिक्षुओं से निम्नांकित क्रिया कलाप करने के लिये कहे :

1. 1 सेमी भुजा की नाप (बाह्य नाप) का मिट्टी या चार्ट पेपर या पुराने ग्रीटिंग कार्ड से लगभग 50 घन बनायें।
2. 1 सेमी चौड़ाई, 1 सेमी ऊँचाई एवं 2 सेमी लम्बाई (बाह्य नाप) के घनाभ चार्ट पेपर या पुराने ग्रीटिंग कार्ड से बनायें।
3. 5 सेमी लम्बा, 3 सेमी चौड़ा तथा 2 सेमी ऊँचा (आन्तरिक नाप) एक ऊपर से खुला घनाभ चार्ट पेपर या ग्रीटिंग कार्ड से बनाकर उसको 1 सेमी भुजा के घनों से भरे। घनाभ को 30 घनों द्वारा भरा जायेगा।

घनाभ का आयतन $= 5 \times 3 \times 2$

$= 30$ घन सेमी

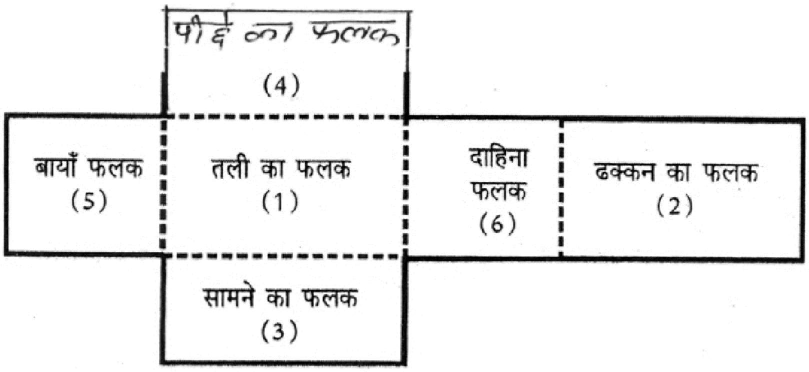
इस प्रकार आयतन के सूत्र का सत्यापन होता है।

इसी प्रकार इस घनाभ को 1 सेमी $\times$ 1 सेमी $\times$ 2 सेमी आकृति के घनाभों से भरकर देखे एवं आयतन के सूत्र का सत्यापन करें।

प्रशिक्षु अन्य विभिन्न नापों के घनाभ बनाकर इस क्रिया कलाप को करे।

घन एवं घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ

शिक्षक प्रशिक्षुओं को माचिस की डिब्बी को खोलकर दिखायें

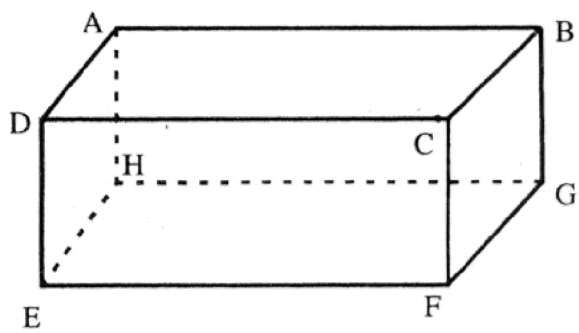


स्पष्ट है कि तली का फलक (1) ढक्कन का फलक (2) के सर्वांगसम हैं। इसी प्रकार सामने का फलक (3), पीछे के फलक (4) के सर्वांगसम हैं और बायाँ फलक, (5) दायें फलक (6) के सर्वांगसम हैं।

> **एक चाक के डिब्बे को खोलिए तथा स्पष्ट कीजिए कि इसमें छः आयताकार फलक हैं।**
>
> **दियासलाई या चाक के डिब्बे में कुल छः फलक होते हैं। इन सभी फलकों के क्षेत्रफलों के योग को इनका सम्पूर्ण पृष्ठ कहते हैं।**

1. घनाभ

पार्श्व चित्र को देखिए। इससे एक घनाभ की आकृति का आभास होता है। किसी तल पर ठोस आकृति को बनाना संभव नहीं है परन्तु हम उसकी आकृति का आभासी चित्र बनाकर संबंधित भागों को दर्शा सकते हैं।



इस प्रकार हम देखते हैं कि घनाभ में—

(i) आठशीर्ष होते हैं

(ii) बारह कोरें होती है।

(iii) छः फलके होती हैं, प्रत्येक फलक आयताकार होती है।

(iv) ऊपरी फलक और निचला फलक (Bottom face) सम्मुख फलकों का एक जोड़ा है।

(v) बायें और दायें वाले फलक सम्मुख फलकों का दूसरा जोड़ा है।

(vi) सामने और पीछे का फलक सम्मुख फलकों का तीसरा जोड़ा है।

चित्र में ABCD ऊपरी फलक और EFGH निचला फलक है।

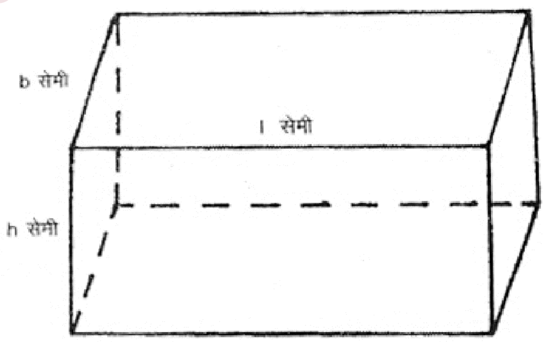
ADEH और CBGF क्रमशः बायें और दायें के फलक हैं।

ABGH और DCFE क्रमशः पीछे और सामने के फलक हैं।

घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ

हमने देखा है कि बजार में बहुत सी वस्तुएँ टिन के चद्दर, दफ्ती के बाक्सों या मोटे कागजों के बाक्सों में पैक करके बेची जाती हैं। इनमें बहुत सी पैकिंग घनाभ के आकार की होती हैं। स्टील के बक्से, आलमारी आदि वस्तुएं भी घनाभ के आकार की होती हैं। निर्माता के लिए यह आवश्यक हो जाता है कि वह यह जाने कि इन वस्तुओं के निर्माण के लिए कितनी टिन का चद्दर, दफ्ती, मोटा कागज आदि लगेंगे। इसे जानने के लिए हमें सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात करना आवश्यक होता है।

अब निम्नांकित घनाभ को देखिए। घनाभ की लम्बाई l सेमी, चौड़ाई b सेमी और ऊँचाई h सेमी है। इस घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।



उपर्युक्त चित्र में

ऊपरी और निचले फलकों के क्षेत्रफलों का योग

$=(l \times b + l \times b)$ सेमी^{2}

$= 2lb$ सेमी^{2}

बायें और दायें फलकों के क्षेत्रफलों का योगफल

$= (b \times h + b \times h)$ सेमी^{2}

$= 2\ b\ h$ सेमी^{2}

सामने और पीछे वाले फलकों के क्षेत्रफलों का योग

$= (h \times l + h \times l)$ सेमी^{2}

$= 2hl$ सेमी^{2}

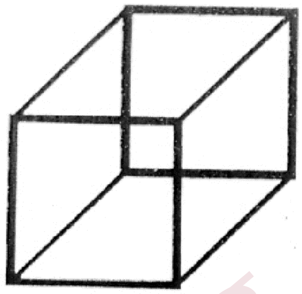
घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ = घनाभ के सभी फलकों का योग

$= 2\ (lb + bh + hl)$ सेमी^{2}

अतः

घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ = 2 (लम्बाई × चौड़ाई + चौड़ाई × ऊँचाई + लम्बाई × ऊँचाई)

घन का सम्पूर्ण पृष्ठ



यह घन की आकृति है। घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई, ऊँचाई समान होने पर वह घन बन जाता है।

इसमें भी छः फलक हैं। सभी फलक वर्गाकार हैं। सभी फलक क्षेत्रफल में समान हैं।

मान लिया घन की एक भुजा 'a' है।

एक फलक का क्षेत्रफल = भुजा^{2} = a^2

घन का सम्पूर्ण पृष्ठ = 6 × फलक का क्षेत्रफल = $6a^2$

घन का सम्पूर्ण पृष्ठ = 6 × भुजा^{2} = $6a^2$

मूल्यांकन

1. नीचे दी गई लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई वाले घनाभों के आयतन ज्ञात कीजिए—
   (i) लम्बाई = 10 सेमी., चोड़ाई = 8 सेमी तथा ऊँचाई = 5 सेमी
   (ii) लम्बाई = 14 सेमी, चौड़ाई = 12 सेमी तथा ऊँचाई = .007 मीटर
2. नीचे दी गई भुजा की माप वाले घनों का आयतन ज्ञात कीजिए—
   (i) भुजा = .15 मी. (ii) भुजा = 1.2 डेसी मी
   (iii) भुजा = .02 डेका मीटर
3. एक कमरे की लम्बाई 5 मी., चौड़ाई 450 सेमी तथा ऊँचाई 35 डेसी भी है। कमरे में कितनी घन मीटर हवा है।
4. दो घन जिनकी भुजायें 3 सेमी एवं 9 सेमी हैं। इनके आयतन में क्या अनुपात होगा?
5. एक मैदान की लम्बाई 30 मीटर तथा चौड़ाई 10 मीटर है। यदि मैदान पर 40 मिमी वर्षा हो, तो ज्ञात कीजिये कि मैदान पर कुल कितने लीटर पानी गिरा?
6. एक ईंट की लम्बाई, चौड़ाई व मोटाई क्रमशः 25 सेमी. 10 सेमी एवं 7 सेमी है। एक 5 मीटर लम्बी, 3.5 मी ऊँची तथा 25 सेमी मोटी दीवार को बनाने में कितनी ईंट लगेंगी?
7. एक घनाभाकार लकड़ी के टुकड़े का आयतन 336 घन सेमी है यदि टुकड़ा 8 सेमी लम्बा, 6 सेमी चौड़ा हो तो उसकी ऊँचाई ज्ञात करो।
8. एक गत्ते का डब्बा 75 सेमी लम्बा, 30 सेमी चौड़ा एवं 15 सेमी ऊँचा है, इसमें 15 सेमी लम्बाई, 10 सेमी चौड़ाई एवं 3 सेमी ऊँचाई के घनाभाकार कितने छोटे डब्बे रखे जा सकते हैं?

9. एक बड़े गत्ते का डब्बा 81 सेमी लम्बा, 30 सेमी चौड़ा एवं 20 सेमी ऊँचा है। इसमें 15 सेमी लम्बाई, 6 सेमी चौड़ाई एवं 5 सेमी ऊँचाई के घनाभाकार आकृति के कितने अधिक से अधिक छोटे डब्बे रखे जा सकते हैं? उन्हें किस प्रकार रखा जायेगा?

10. एक पानी की टंकी में 420 लीटर पानी है। एक घनाभाकार डब्बे के द्वारा जिसकी लम्बाई 20 सेमी, चौड़ाई 15 सेमी तथा ऊँचाई 14 सेमी है टंकी से कितनी बार में पानी निकाला जा सकेगा।

11. एक घनाभ की लम्बाई 2.5 सेमी., चौड़ाई 3.5 सेमी. तथा ऊँचाई 4.0 सेमी. है। उसका आयतन होगा—

(i) 7.7 घन सेमी (ii) .77 घन मी

(iii) 77 घन सेमी (iv) 7.7 घन मी

12. एक घन की प्रत्येक कोर 5 मीटर है। इस घन का आयतन होगा—

(i) 125 घन सेमी (ii) .125 घन डेकामी

(iii) 12500 घन सेमी (iv) 12.5 घन मीटर

13. 8 मी लम्बी, 3.5 मी ऊँची एवं 20 सेमी मोटी दीवार का आयतन होगा—

(i) 56 घन मी (ii) .56 घन मी

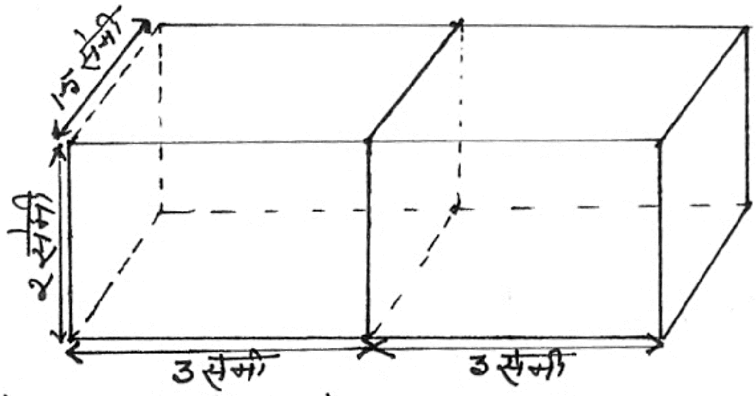
(iii) 56000 घन सेमी (iv) 5.6 घन मी.

14. लकड़ी के घनाभ के आकार के एक टुकड़े की लम्बाई 64 सेमी., चौड़ाई 32 सेमी. तथा ऊँचाई 48 सेमी है। इसमें 16 सेमी. लम्बाई, 8 सेमी. चौड़ाई एवं 48 सेमी. ऊँचाई वाले कितने गुटके बनाए जा सकते है?

(i) 60 (ii) 64

(iii) 70 (iii) 72

15. 3 सेमी × 2 सेमी × 1.5 सेमी नाप के दो घनाभ चित्रानुसार सटाकर रखे गये हैं। इस प्रकार रखने से बने घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात करो।



16. नीचे दी गई लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई वाले घनाभों का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए—

(i) लम्बाई = 5½ सेमी, चौड़ाई = 1.7 सेमी, ऊँचाई = 3 सेमी

(ii) लम्बाई = 6 सेमी, चौड़ाई = 8.3 सेमी, ऊँचाई = 2.3 सेमी

17. नीचे दी गई भुजा की माप वाले घन का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए—

(i) भुजा = 1.5 सेमी

(ii) भुजा = 18 सेमी

18. एक कमरे की लम्बाई 4 मीटर, चौड़ाई 3.5 मीटर और ऊँचाई 3 मीटर है। इस कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

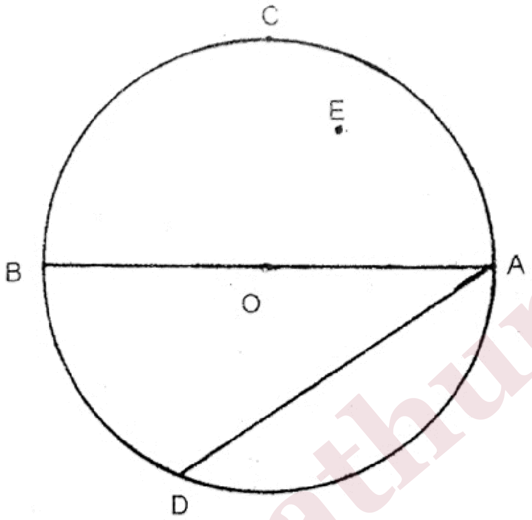
19. एक कमरे की लम्बाई 3.5 मीटर, चौड़ाई 2.5 मीटर एवं ऊँचाई 3 मीटर है। इसकी चारों दीवारों पर ` 3.5 प्रति वर्ग मीटर की दर से सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

20. एक हाल की लम्बाई 60 फीट तथा चौड़ाई 40 फीट एवं ऊँचाई 20 फीट है। हाल की दो दीवारों पर 5 फीट × 7½ फीट के दो दरवाजे लगे हैं। कमरे की दीवारो पर ` 9 प्रति फीट की दर से पेंटिंग कराने का क्या खर्च होगा?

———

इकाई-16
वृत्तखण्ड एवं त्रिज्य खण्ड की अवधारणा

निम्नांकित चित्र में वृत्त का केन्द्र O तथा त्रिज्या 3.0 सेमी है। रेखाखंड AO की सीध में B तक बढ़ाया गया है। रेखाखंड AD वृत्त की जीवा है।



(i) रेखाखंड AB को क्या कहते हैं?

(ii) रेखाखंड AB और त्रिज्या OA में क्या सम्बन्ध हैं?

(iii) वृत्त के भाग BC को क्या कहते हैं?

(iv) वृत्त के भाग BCA को क्या कहते हैं?

(v) बिन्दु E वृत्त के अन्तः क्षेत्र में है या बाह्य क्षेत्र में है?

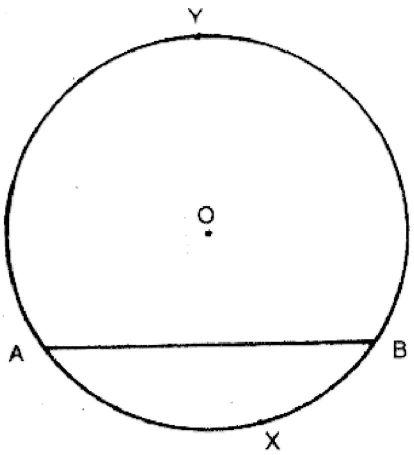
(vi) AO की नाप कितनी है?

(vii) व्यास AB की माप कितनी है?

AB वृत्त का व्यास है, जो त्रिज्या का दो गुना है। अतः $AB = 2OA$। वृत्त के किसी भाग को चाप कहते हैं। चित्र में वक्र BC चाप है। वृत्त की सबसे बड़ी जीवा वृत्त की व्यास होती है। व्यास, वृत्त को दो समान भागों में विभक्त करता है। प्रत्येक भाग अर्धवृत्त कहलाता है। वक्र BCA तथा वक्र ADB अर्धवृत्त हैं। चित्र में OA वृत्त की त्रिज्या है तथा वृत्त का व्यास AB है।

वृत्तखंड

किसी त्रिज्या का एक वृत्त खीचिए जिसका केन्द्र O है। उसमें एक जीवा AB खीचिए। इस वृत्त पर दो बिन्दु X और Y लीजिए।



(i) जीवा AB द्वारा वृत्तीय क्षेत्र कितने भागों में विभक्त हो गया है?

(ii) प्रत्येक भाग को क्या कहते हैं?

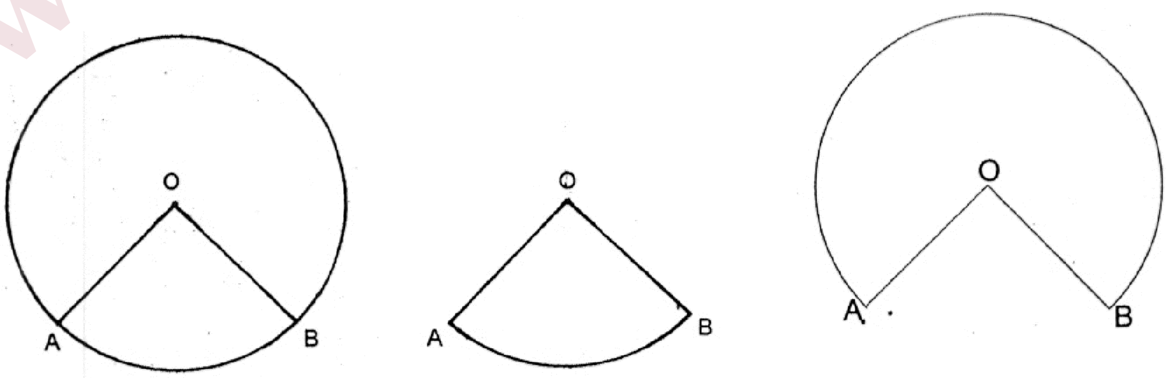
जीवा AB के द्वारा वृत्तीय क्षेत्र दो भागों AXB और AYB में विभाजित हो गया और प्रत्येक भाग को वृत्तखंड कहते हैं।

वृत्त के चाप और उसकी जीवा से घिरा हुआ क्षेत्र वृत्तखंड कहलाता है।

छोटे भाग को लघु वृत्तखंड और बड़े भाग को दीर्घ वृत्तखंड कहते हैं। चित्र में चाप AXB और जीवा AB से घिरा क्षेत्र लघु वृत्तखंड है, तथा चाप AYB और जीवा AB से घिरा क्षेत्र दीर्घ वृत्तखंड है।

त्रिज्यखंड

एक दफ्ती का गत्ता लेकर उस पर 3.0 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खीचिए जिसका केन्द्र O है। वृत्त पर दो बिन्दु A और B लीजिए। OA एवं OB त्रिज्याएँ खींचिए। वृत्त को वृत्तीय क्षेत्र सहित गत्ते से काटकर अलग कीजिए। अब सावधानी से A से O तक तथा B से O तक काटकर वृत्त क्षेत्र के AOB भाग को अलग कीजिए।



वृत्तीय क्षेत्र को काटकर निकाले गये भाग AOB को क्या नाम दिया जा सकता है? इस भाग को त्रिज्यखंड कहते हैं। शेष भाग भी एक त्रिज्यखंड है।

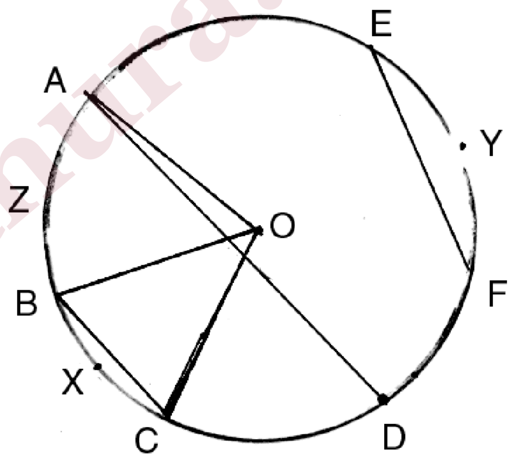
वृत्त के चाप तथा चाप के अन्त्य बिन्दुओं से जाने वाली त्रिज्याओं से घिरे क्षेत्र को त्रिज्य खंड कहते हैं।

क्रियाकलाप

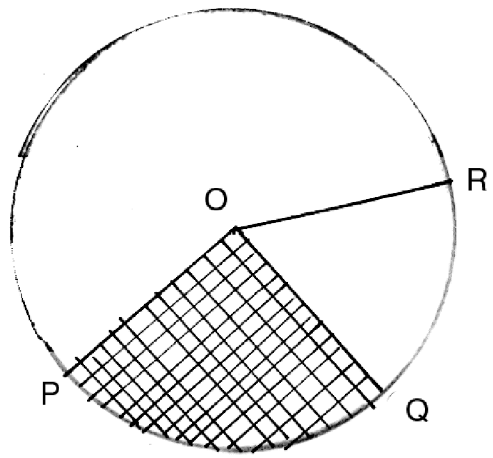
शिक्षक प्रशिक्षुओं से विभिन्न नाप की त्रिज्याओं से गत्ते या मोटे कागज की वृत्ताकार चकती बनाने को कहें एवं इन वृत्ताकार चकतियों में वृत्तखण्ड एवं त्रिज्य खण्ड को अलग-अलग रंग से भरकर वृत्तखण्ड एवं त्रिज्य खण्ड की अवधारणा को स्पष्ट करें।

मूल्यांकन–

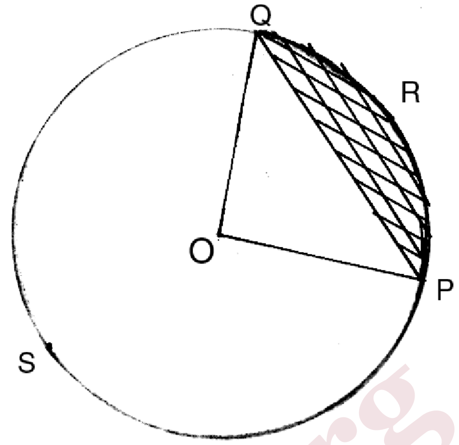
1. पार्श्व चित्र में बिन्दु O वृत्त का केन्द्र है। OA, OB एवं OC वृत्त की त्रिज्यायें हैं। बिन्दु X, Y तथा Z वृत्त पर स्थित हैं। AD, EF एवं BC वृत्त जीवाएं हैं। तीन त्रिज्य खण्डों एवं चार वृत्तखण्डों के नाम लिखो।



2. पार्श्व चित्र में छायांकित त्रिज्य खण्ड की त्रिज्याओं के नाम लिखिए।



3. पार्श्व चित्र में बिन्दु P, Q, R एवं S वृत्त पर स्थित हैं। छायांकित वृत्तखण्ड की जीवा तथा उसके संगत त्रिज्यखण्ड का नाम बताइए। चित्र में कितने वृत्त खण्ड हैं उनके नाप लिखिए।



———

इकाई–17
वृत्तखण्ड का कोण

पार्श्व चित्र में बिन्दु A, C, B एवं P वृत्त पर स्थित है। रेखा खण्ड AB वृत्त की जीवा है।

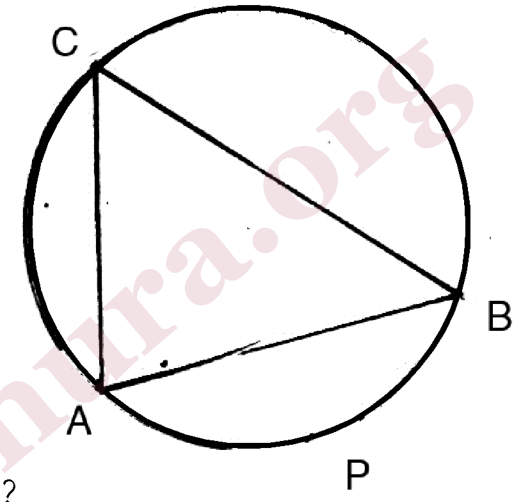
(i) चाप ACB एवं जीवा AB से घिरे क्षेत्र को क्या कहते हैं?

(ii) यह क्षेत्र वृत्तखण्ड ACB कहलाता है। इस वृत्तखण्ड ACB में $\angle ACB$ स्थित है, यह वृत्तखण्ड ACB का कोण कहलाता है।

(iii) $\angle CAB$ किस वृत्तखण्ड का कोण है?

(iv) $\angle ABC$ किस वृत्तखण्ड में स्थित है।

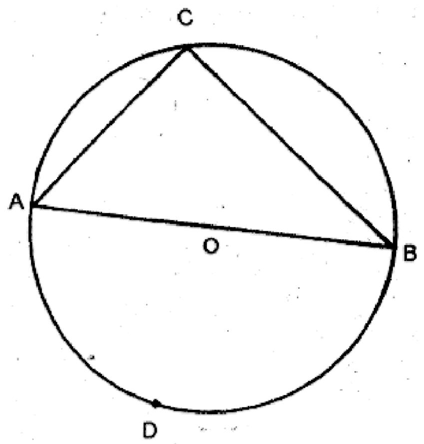
(v) चित्र में क्या वृत्तखण्ड APB में कोई कोण है?



अर्धवृत्त का कोण

एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र O है। इसका एक व्यास AOB खींचिए। वृत्त पर दो बिन्दु C और D लीजिए। C को A और B से मिलाइए।

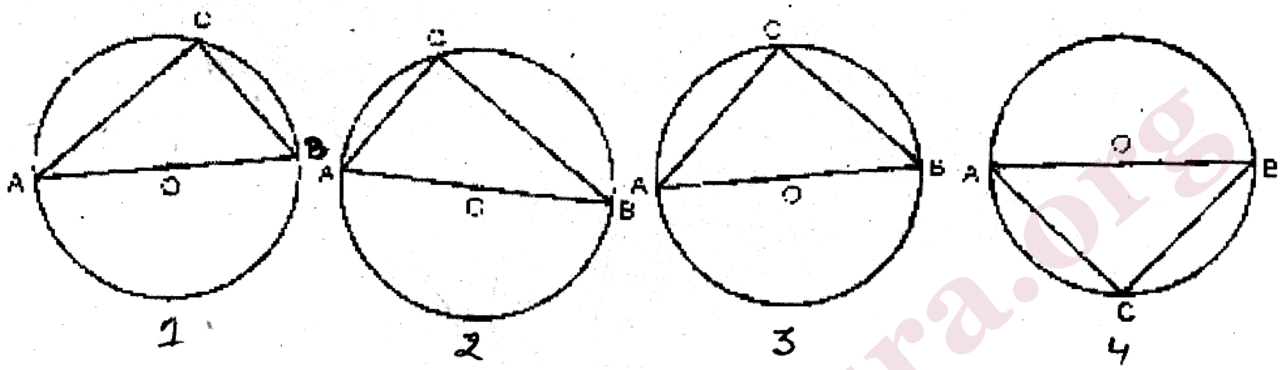
अर्धवृत्त ACB में बने कोण का नाम बताइए।



हम जानते हैं कि चाप ACB एक अर्धवृत्त है। AB व्यास है। $\angle ACB$ अर्धवृत्त का कोण है। $\angle ACB$ की माप क्या होगी? $\angle ACB$ को नापिए। आप देखेंगे कि $\angle ACB = 90°$।

क्रिया-कलाप :

1. एक वृत्त बनाइए जिसका केन्द्र O है। इसमें व्यास AOB खींचिए। इस प्रकार बने एक अर्धवृत्त में बिन्दु C लीजिए। रेखाखण्ड AC और BC खींचिए। इस प्रकार $\angle ACB$ अर्धवृत्त का कोण बन गया है। $\angle ACB$ नापिए तथा अन्तर $90° - \angle ACB$ ज्ञात कीजिए।



तीन अन्य विभिन्न नाप की त्रिज्याओं के अर्धवृत्तों के कोणों के साथ भी यही प्रक्रिया दोहराइए और प्राप्त परिणामों को निम्नवत् सारणीबद्ध कीजिए :

अर्धवृत्त का क्रमांक	$\angle ACB$	$90° - \angle ACB$
1.		
2.		
3.		
4.		

आप देखेंगे कि प्रत्येक बार $90° - \angle ACB$ का मान 0 या लगभग शून्य है।

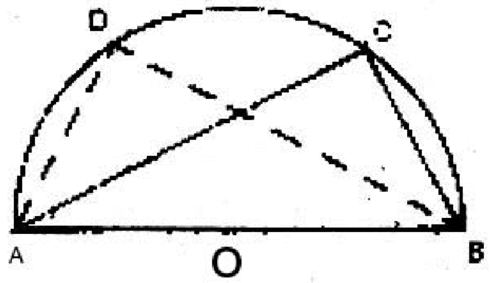
$\therefore \angle ACB = 90°$

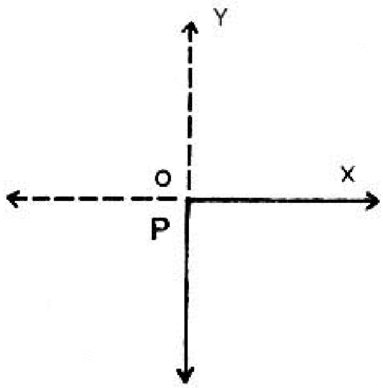
अतः हमने देखा कि

अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।

कागज मोड़ने व अध्यारोपण का क्रिया-कलाप 2 :

AB व्यास पर एक अर्धवृत्त बनाइए। अर्धवृत्त पर एक बिन्दु C लीजिए। रेखाखण्ड AC और BC खींचिए। इस प्रकार $\angle ACB$ अर्धवृत्त का कोण बन गया।





अब एक ट्रेसिंग पेपर लीजिए। इसे दो बार मोड़कर एक समकोण बनाइए। मान लीजिए $\angle XPY$ समकोण है। $\angle XPY$ को $\angle ACB$ पर इस प्रकार अध्यारोपित कीजिए कि बिन्दु P, बिन्दु C पर पड़े और भुजा PX, भुजा CA पर पड़े। अब क्या PY, भुजा CB पर पड़ती है? हम देखेंगे कि वास्तव में PY, CB पर पड़ती है। इस प्रकार $\angle XPY$, $\angle ACB$ को पूरा-पूरा ढँक लेता है।

$\therefore \quad \angle ACB = \angle XPY$

परन्तु $\angle XPY = 90°$

$\therefore \quad \angle ACB = 90°$

इसी प्रकार अर्धवृत्त पर एक अन्य बिन्दु D लीजिए। AD और BD को मिलाकर अर्धवृत्त का कोण $\angle ADB$ बनाइए और $\angle XPY$ को $\angle ADB$ पर अध्यारोपित कीजिए। क्या $\angle XPY$, $\angle ADB$ को पूरा-पूरा ढँक लेता है? हम देखेंगे कि $\angle XPY$, $\angle ADB$ को ढँक लेता है।

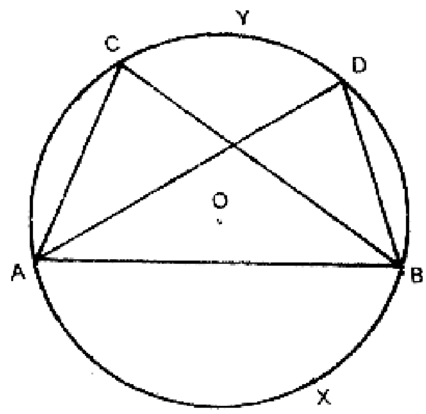
$\angle ADB = \angle XPY = 1$ समकोण

अतः अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।

एक ही वृत्तखण्ड के कोण

शिक्षक प्रशिक्षुओं को निम्नांकित क्रिया-कलाप करने को कहें

एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र O हो। इसमें जीवा AB खींचिए। इस प्रकार वृत्त दो चापों AXB और AYB में बँट गया। चाप AYB पर दो बिन्दु C और D लीजिए। रेखाखण्डों AC, BC, AD एवं BD को खींच दीजिए।



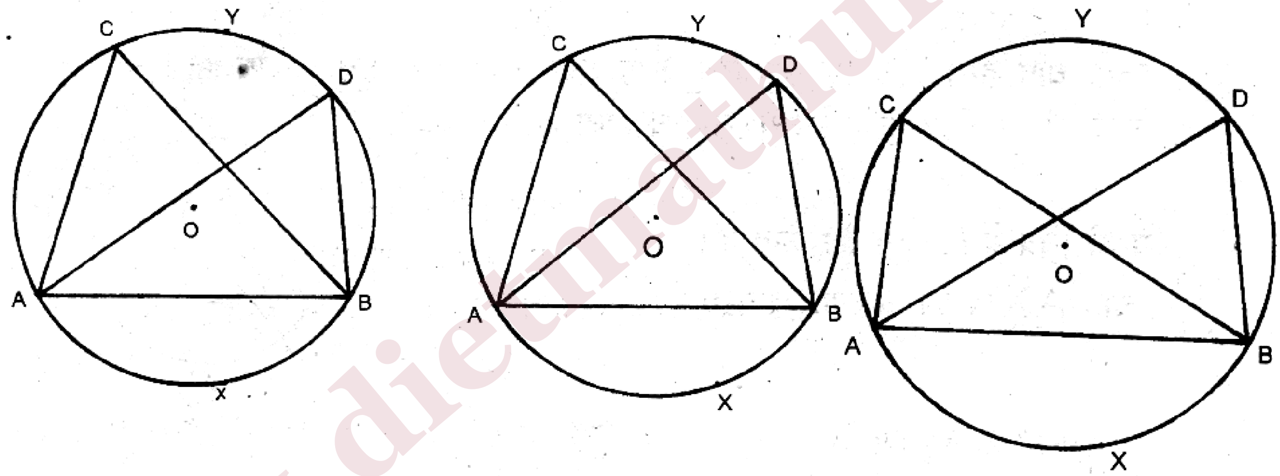
इस प्रकार $\angle ACB$ और $\angle ADB$ एक ही चाप AYB के अन्तर्गत कोण या एक ही वृत्तखण्ड के कोण हैं। ये दोनों कोण एक ही चाप AYB को अन्तःखण्डित करते हैं।

अतः यदि दो या दो से अधिक कोण किसी वृत्त के एक ही चाप को अन्तः खण्डित करते हों और उनके शीर्ष उसी चाप पर हों, तो उन्हें एक ही चाप के अन्तर्गत कोण या एक ही वृत्तखण्ड के कोण कहते हैं।

एक ही वृत्तखण्डों के कोणों में सम्बन्ध

क्रियाकलाप :

बिन्दु O को केन्द्र मानकर एक वृत्त खींचिए। इसमें एक जीवा AB खींचिए। इस प्रकार वृत्त दो भागों AXB और AYB में बँट गया। चाप AYB पर दो बिन्दु C और D लीजिए। रेखाखण्डों AC, AD, BC एवं BD को खींच दीजिए। इस प्रकार $\angle ACB$ और $\angle ADB$ एक ही वृत्तखण्ड AYB के कोण बन गए।



$\angle ACB$ और $\angle ADB$ को नापिए तथा $\angle ACB - \angle ADB$ ज्ञात कीजिए। इसी प्रकार दो अन्य वृत्त अलग नाप की त्रिज्या में खींचकर उपर्युक्त प्रक्रिया को दोहराइए और प्राप्त परिणामों को निम्नवत् सारणीबद्ध कीजिए :

वृत्त का क्रमांक	$\angle ACB$	$\angle ADB$	$\angle ACB - \angle ADB$
1.			
2.			
3.			

हम देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में $\angle ACB - \angle ADB$ का मान्य शून्य या लगभग शून्य है। अतः प्रत्येक स्थिति में $\angle ACB = \angle ADB$।

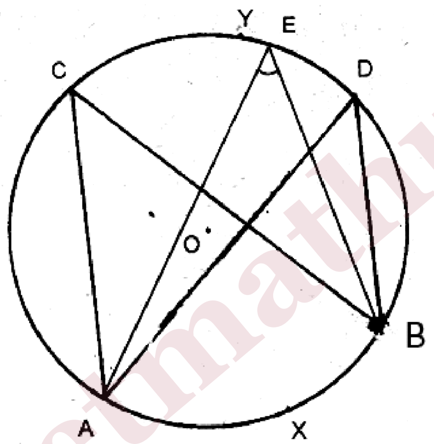
> अतः एक ही वृत्तखण्ड के कोण या एक ही चाप के अन्तर्गत कोण समान होते हैं।

उपर्युक्त तथ्य का सत्यापन निम्नलिखित क्रिया-कलाप द्वारा भी कीजिए।

कागज मोड़ने एवं अध्यारोपण का क्रिया-कलाप :

एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र O हो। वृत्त पर दो बिन्दु A और B लीजिए। इस प्रकार वृत्त दो चापों AXB और AYB में विभक्त हो गया। चाप AYB पर दो बिन्दु C और D लीजिए। रेखाखण्डों AC, BC, AD और BD को खींच दीजिए।

जिससे $\angle ACB$ और $\angle ADB$ एक ही वृत्तखण्ड AYB के कोण बन गए हैं।



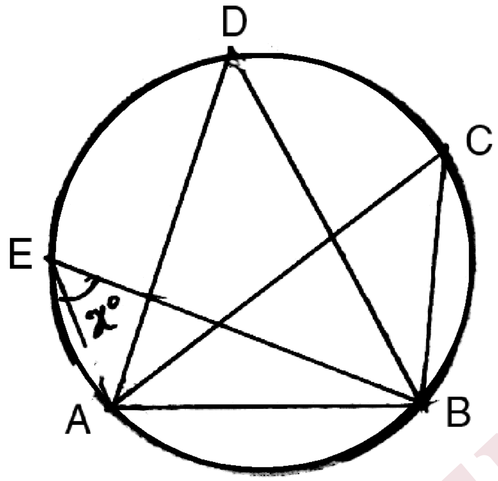
अब ट्रेसिंग कागज पर $\angle ACB$ को ट्रेस करके, इसे $\angle ADB$ पर इस प्रकार रखिए कि बिन्दु C, बिन्दु D पर और भुजा CA, भुजा DA पर पड़े। अब देखिए कि क्या $\angle ACB$ कोण $\angle ADB$ तथा भुजा CB, भुजा DB पर पड़ती है? हम देखेंगे कि भुजा CB, भुजा DB पर ही पड़ती है। अतः $\angle ACB = \angle ADB$।

अब $\angle ACB$ की ट्रेस कापी इस प्रकार घुमाइए कि बिन्दु C, चाप AYB पर रहे तथा CA सदैव A से जाए तो, हम देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में CB बिन्दु B से ही होकर जाएगी। अतः चाप AYB पर यदि अन्य बिन्दु D तथा बिन्दु E है, तो $\angle AEB = \angle ACB$ तथा $\angle ADB = \angle ACB$। इस प्रकार $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB$ है।

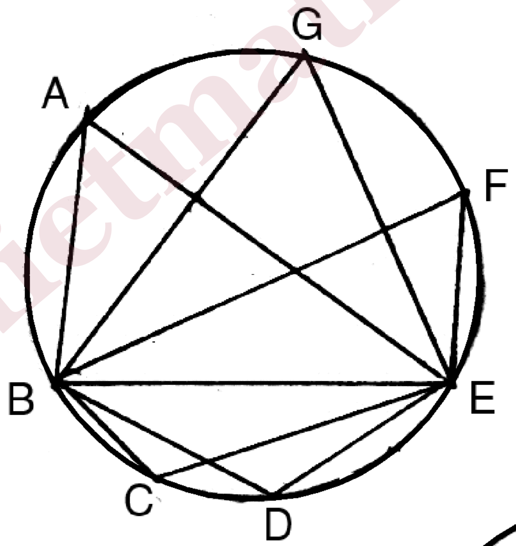
स्पष्ट है कि एक ही वृत्तखण्ड के कोण समान होते हैं।

मूल्यांकन :

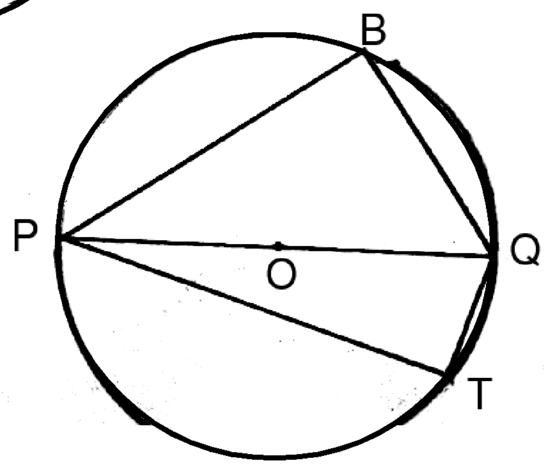
1. निम्नांकित आकृति में $\angle BEA = x°$ तो $\angle BDA$ तथा $\angle BCA$ के मान बताइए।



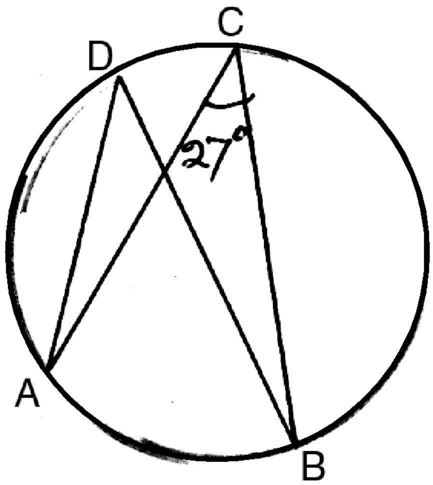
2. निम्नांकित चित्र में एक ही वृत्त खण्ड में स्थित कोणों के नाम बताइए।



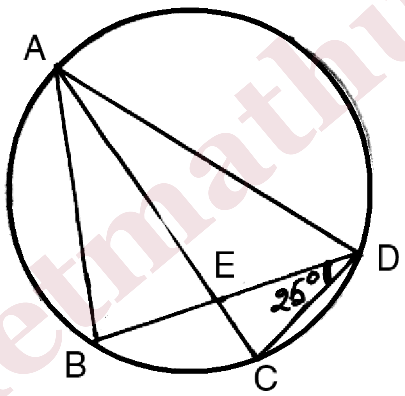
3. सम्मुख चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। $\angle QRP$ तथा $\angle PTQ$ का मान बताइए। दोनों कोणों में क्या सम्बन्ध है?



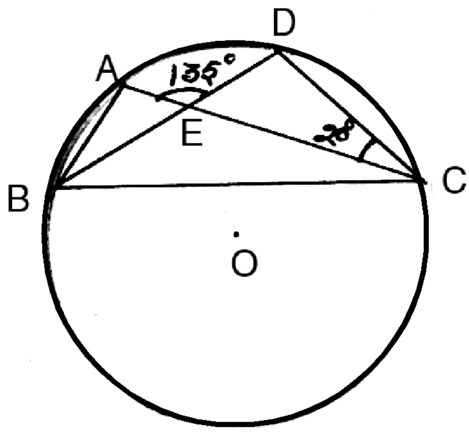
4. निम्नांकित चित्र में ∠ADB का मान क्या है?



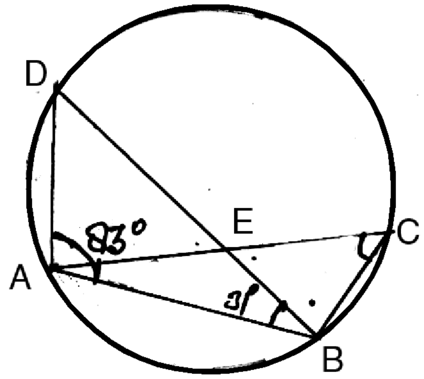
5. निम्नांकित चित्र में ∠DAB का अर्द्धक AEC है। यदि ∠CDB = 25° तो ∠DAB का मान बताओ।



6. निम्नांकित चित्र में ∠AED = 135° तथा ∠ACD = 20° है, जो ∠CAB का मान बताओ।



7. निम्नांकित चित्र में $\angle ABD = 31^\circ$ तथा $\angle DAB = 83^\circ$ तो $\angle BDA$ तथा $\angle BCA$ का मान बताओ।



8. सम्मुख चित्र में बने कोणों में सत्य/असत्य कथनों को छाँटिए :

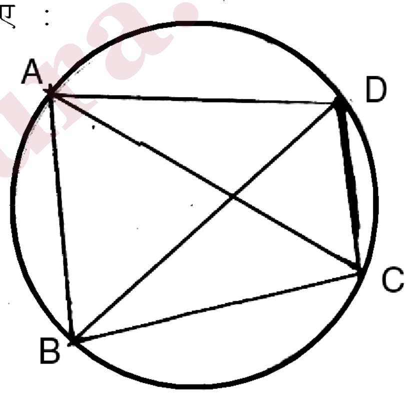
(i) $\angle BDC = \angle BAC$

(ii) $\angle BDC = \angle BCA$

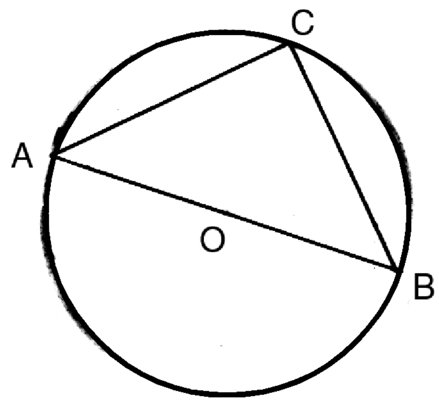
(iii) $\angle ACB = \angle ADB$

(iv) $\angle BDA = \angle CDB$

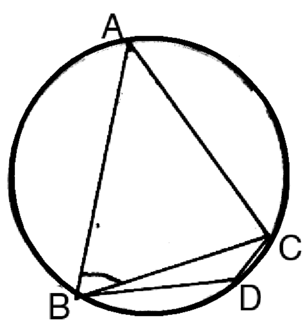
(v) $\angle ACD = \angle DBA$



9. सम्मुख चित्र में O वृत्त का केन्द्र है तथा जीवा AC = जीवा BC तो $\angle CAB$ तथा $\angle CBA$ का मान बताओ।



10. सम्मुख चित्र में लघु चाप BDC का अन्तर्गत कोण बताओ।

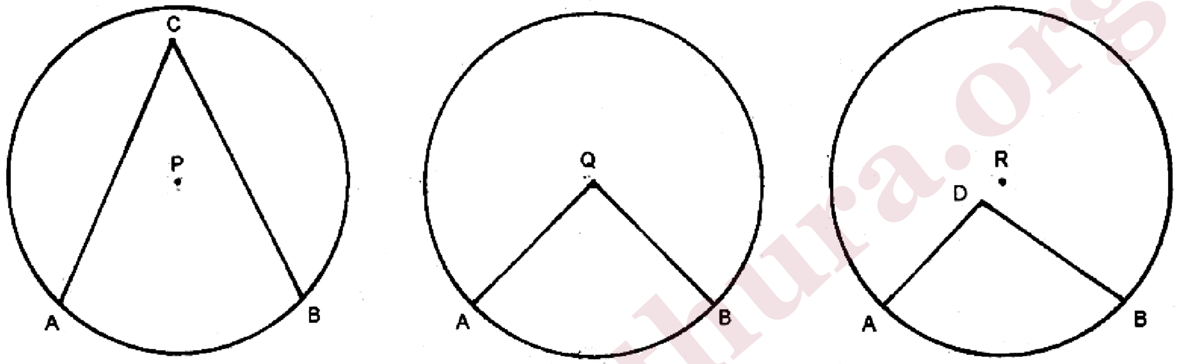


———

इकाई-18

वृत्त के चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र तथा परिधि पर बने कोणों का सम्बोध एवं इनका पारस्परिक सम्बन्ध।

चाप के सम्मुख केन्द्र पर बना कोण : तीन वृत्त हैं जिनके केन्द्र क्रमशः P, Q तथा R हैं। प्रत्येक वृत्त में लघु चाप AB के सम्मुख कोण बनाए गये हैं।



(i) (ii) (iii)

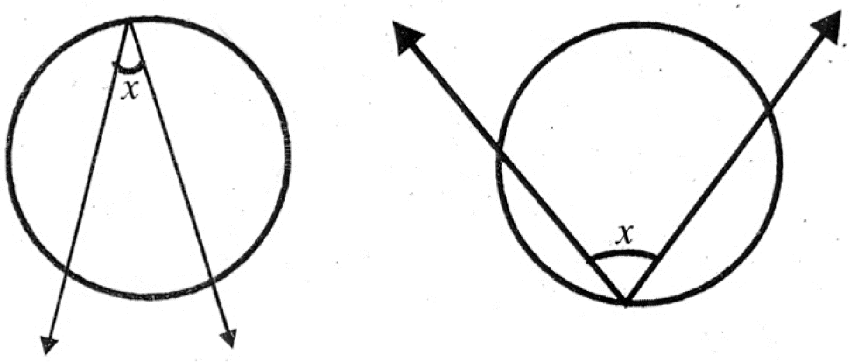
उपर्युक्त वृत्तों में किस वृत्त में लघु चाप AB के सम्मुख केन्द्र पर कोण बना है?

चित्र वृत्त (ii) में लघु चाप AB के सम्मुख केन्द्र पर $\angle AOB$ बना है।

किसी चाप के अन्त्य बिन्दुओं को केन्द्र से मिलाने वाली त्रिज्याओं से बने कोण को उस चाप के सम्मुख केन्द्र पर बना कोण कहते हैं।

अन्तर्गत कोण (Inscribe angle)

ध्यान दें

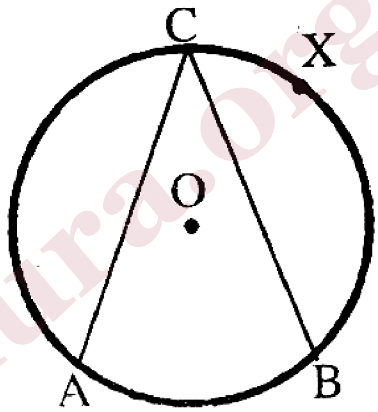


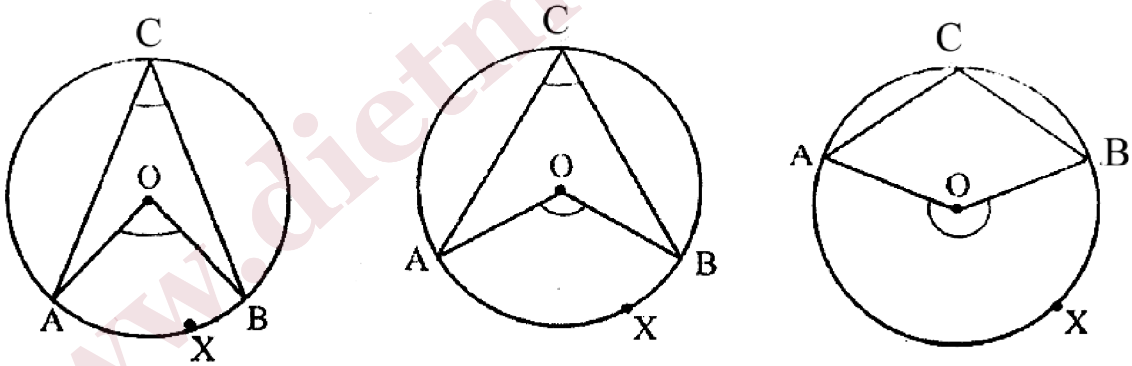
उपर्युक्त चित्रों में ध्यान दे कि $\angle x$ का शीर्ष वृत्त का एक बिन्दु तथा इस कोण की दोनों भुजाएँ वृत्त को दो अलग-अलग बिन्दुओं पर काटती हैं। इस प्रकार का बना $\angle x$ अन्तर्गत कोण कहलाता है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि

कोई कोण वृत्त का अन्तर्गत कोण होता है यदि उस कोण का शीर्ष वृत्त का एक बिन्दु हो तथा उस कोण की भुजाएँ वृत्त को अलग-अलग बिन्दुओं पर काटती हैं।

याद रखें :

पार्श्वचित्र में O केन्द्र का एक वृत्त है। इसके दीर्घचाप AXB पर एक बिन्दु C है। रेखाखंड CA तथा CB खींचे गये हैं। इस प्रकार $\angle ACB$ दीर्घचाप AXB का अन्तर्गत कोण है। इसे इस प्रकार भी कह सकते हैं कि दीर्घ चाप AXB का अन्तर्गत कोण $\angle ACB$ लघुचाप AB द्वारा वृत्त के शेष भाग के बिन्दु C पर बना कोण है।





(i) (ii) (iii)

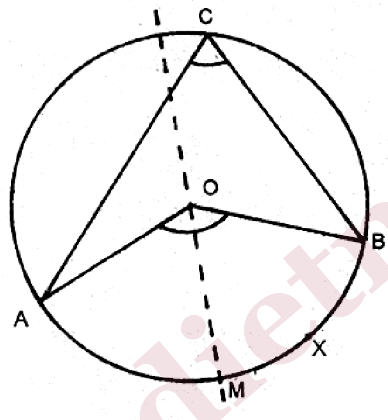
अपनी अभ्यास पुस्तिका पर चित्र (1) के अनुसार एक वृत्त जिसका केन्द्र *'O'* है खीचिए तथा उस पर दो बिन्दु A और B लीजिए। लघु चाप AB पर बिन्दु X तथा दीर्घचाप AB पर बिन्दु C लीजिए। AC, BC, AO एवं BO रेखाखंडों को मिलाइए जिससे अन्तर्गत कोण ACB तथा केन्द्र पर $\angle AOB$ बन गये। $\angle ACB$ तथा $\angle AOB$ को नापिए।

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर उपर्युक्त प्रक्रिया चित्र (ii) और (iii) के अनुसार दोहराइए। अपनी अभ्यास पुस्तिका पर प्राप्त परिणामों को निम्नवत् सारणीबद्ध कीजिए :

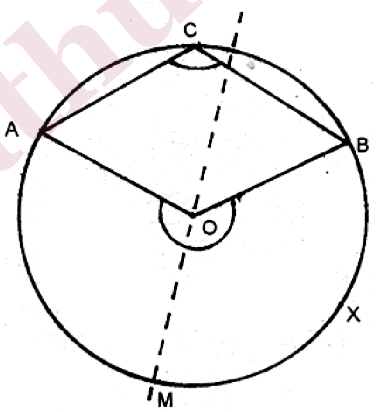
वृत्त का क्रमांक	$\angle ACB$	$\angle AOB$	$\angle AOB - 2\angle ACB$
(i)			
(ii)			
(iii)			

हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में $\angle AOB - 2\angle ACB$ शून्य या लगभग शून्य है। अतः प्रत्येक अवस्था में, $\angle AOB = 2\angle ACB$ ले सकते हैं।

इन्हें भी कीजिए और सोचिए : निम्नांकित चित्र (i) की भाँति अभ्यास पुस्तिका के पृष्ठ पर एक वृत्त खींचिए और उसका केन्द्र O मानिए। वृत्त पर दो बिन्दु **A** और B लीजिए। लघु चाप AB में कोई बिन्दु X लीजिए तथा वृत्त के शेष भाग पर बिन्दु C लीजिए। रेखाखंडों AC, BC, AO एवं BO को खींचिए। इस प्रकार चाप AXB द्वारा अन्तरित $\angle ACB$ अन्तर्गत कोण तथा $\angle AOB$ केन्द्र पर अन्तरित कोण हैं।



(i)



(ii)

एक ट्रेसिंग पेपर पर चित्र (i) को ट्रेस कीजिए। इस प्रकार इस कागज पर भी O केन्द्र वाला वृत्त तथा $\angle AOB$ और $\angle ACB$ बन गये। कागज को ऐसा मोड़िए कि चाप AXB का मध्य बिन्दु M प्राप्त हो जाए। इस प्रकार $\angle AOB$ दो कोणों $\angle AOM$ तथा $\angle MOB$ में विभक्त हो गया।

इस प्रकार $\angle AOM = \angle MOB$ क्योंकि OM पर आकृति को मोड़ने पर OA भुजा, OB को ढक लेती है। अतः $\angle AOM = \angle MOB = \frac{1}{2}\angle AOB$ अब कागज पर बने $\angle AOM$ को अभ्यास पुस्तिका पर बने $\angle ACB$ पर रखिए। हम देखेंगे कि ये दोनों कोण एक दूसरे को ढक लेते हैं।

$\therefore \quad \angle ACB = \angle AOM$

परन्तु $\quad \angle AOM = \frac{1}{2}\angle AOB$

$\therefore \quad \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$

यही प्रक्रिया चित्र (ii) के लिए दोहराइए। हम देखेंगे कि

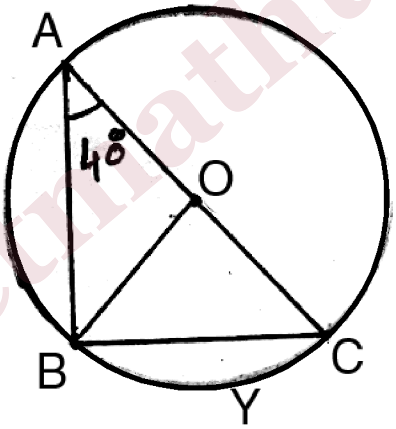
$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$$

अतः

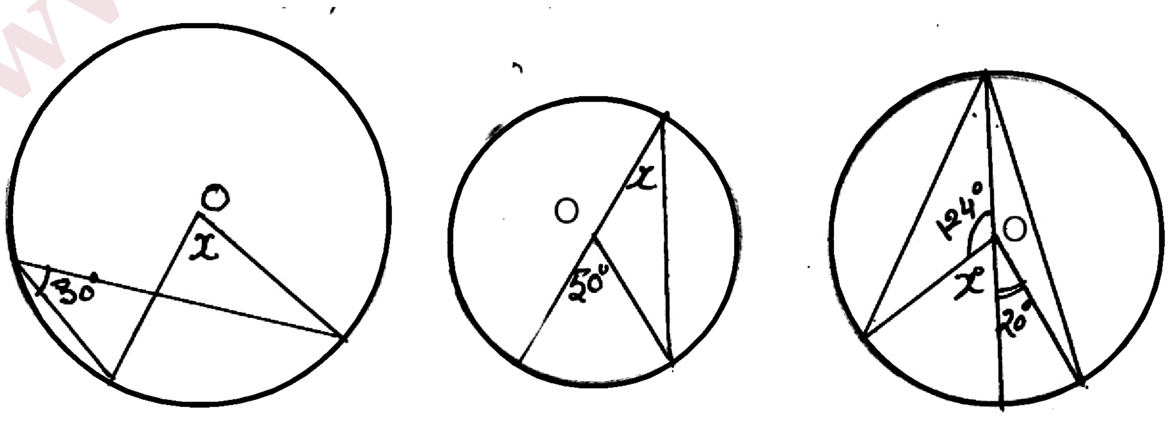
एक चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण, उसी चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग में स्थित किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण का दो गुना होता है।

मूल्यांकन :

1. चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। चाप BYC का अंशमाप बताइए।



2. निम्नांकित वृत्तों में प्रत्येक का केन्द्र O है। प्रत्येक में x का मान बताओ।



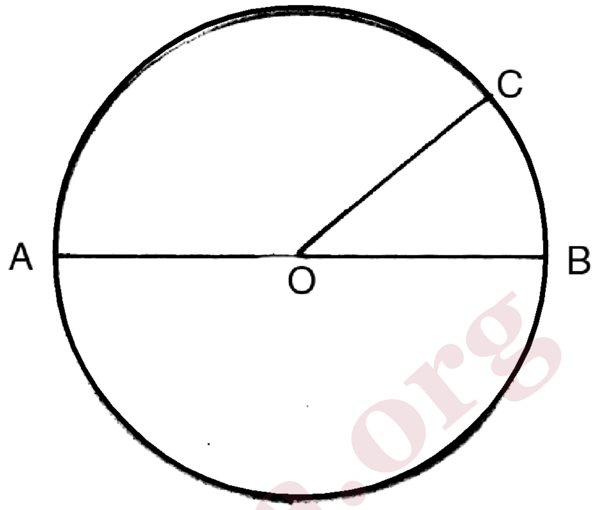
3. सम्मुख चित्र में वृत्त का केन्द्र O है। AOB वृत्त का व्यास और $\angle COB = 40°$ ज्ञात कीजिए :

(i) दीर्घचाप BC का अंशमाप

(ii) दीर्घ चाप AC का अंशमाप

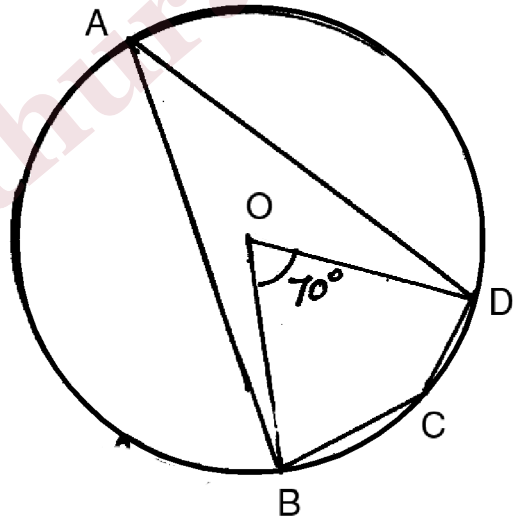
(iii) लघु चाप AC का अंशमाप

(iv) अर्धवृत्त ACB का अंशमाप

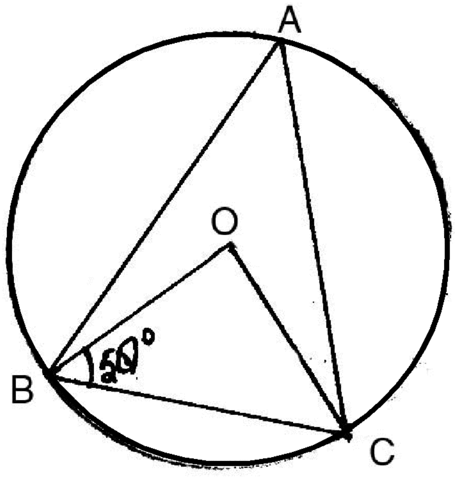


4. वृत्त की एक जीवा की लम्बाई उसकी त्रिज्या के बराबर है। इस जीवा द्वारा दीर्घ वृत्तखंड में अन्तरित कोण का मान बताइए।

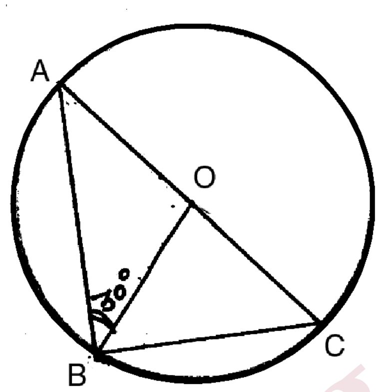
5. सम्मुख चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। $\angle DOB = 70°$, $\angle BCD$ का माप बताइए।



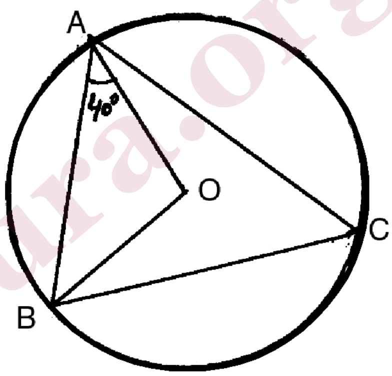
6. सम्मुख आकृति में वृत्त का केन्द्र O है। $\angle OBC = 58°$ तो $\angle CAB$ का मान बताइए।



7. सम्मुख चित्र में O वृत्त का केन्द्र है $\angle COB$ का मान बताइए।



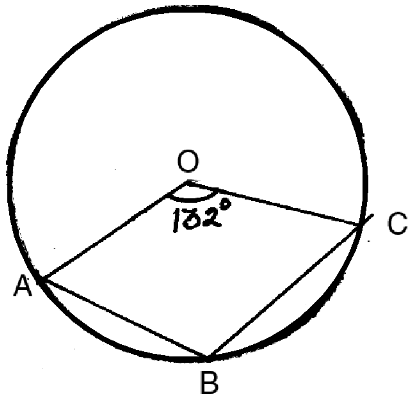
8. सम्मुख चित्र में $\angle OAB = 40°$ जबकि O वृत्त का केन्द्र हैं, तो $\angle BCA$ का मान बताइए।



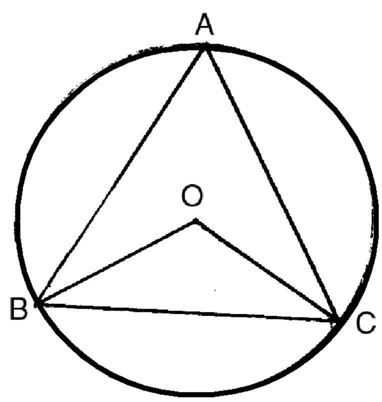
9. सम्मुख चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। $\angle COA = 132°$ तो वृत्त में बने $\angle ABC$ का मान होगा।

(i) 228° (ii) 264°

(iii) 114° (iv) 48°



10. वृत्त का केन्द्र O है। ABC का समबाहु त्रिभुज है। $\angle OBC$ का मान बताओ।



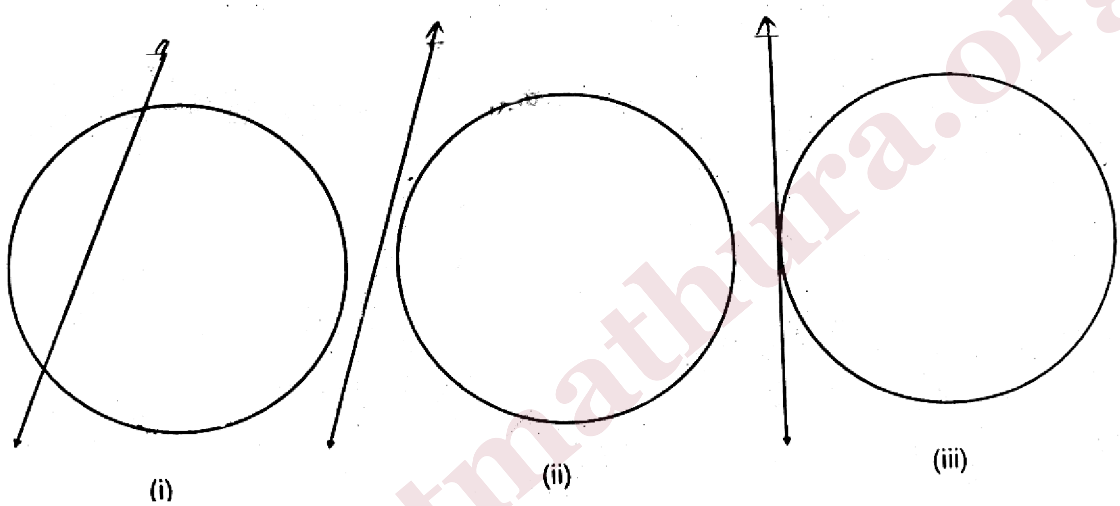
———

इकाई-19

वृत्त की छेदक रेखा, स्पर्श रेखा तथा स्पर्श बिन्दु की अवधारणा

छेदिका, स्पर्श रेखा और स्पर्श बिन्दु :

यदि एक ही तल में एक वृत्त और एक रेखा है, तो रेखा वृत्त को कितने बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद कर सकती है? इस सम्बन्ध में केवल तीन संभावनाएँ हो सकती हैं, जो निम्नलिखित हैं :



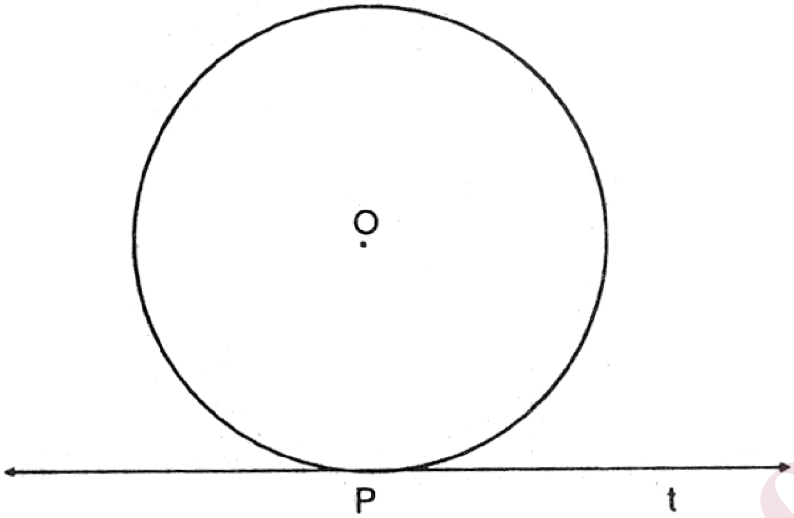
1. रेखा वृत्त को दो भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है, जैसा कि चित्र (i) में दिखाया गया है।
2. रेखा, वृत्त को प्रतिच्छेद नहीं करती है, जैसा कि चित्र (ii) में दिखाया गया है।
3. रेखा, वृत्त को केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है, जैसा कि चित्र (iii) दिखाया गया है।

प्रथम स्थिति में रेखा, वृत्त की छेदिका कहलाती है।

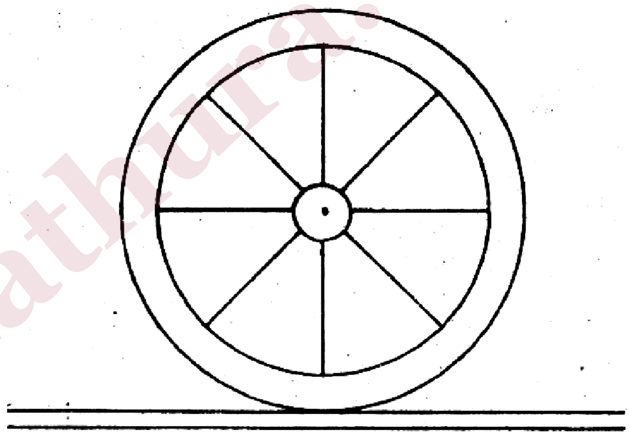
अतः किसी वृत्त की छेदिका वह रेखा है जो उस वृत्त को दो भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है। तृतीय स्थिति में रेखा, वृत्त की स्पर्श रेखा कहलाती है।

इस प्रकार किसी वृत्त की स्पर्श रेखा वह रेखा है जो उस वृत्त को केवल एक ही बिन्दु पर काटती है।

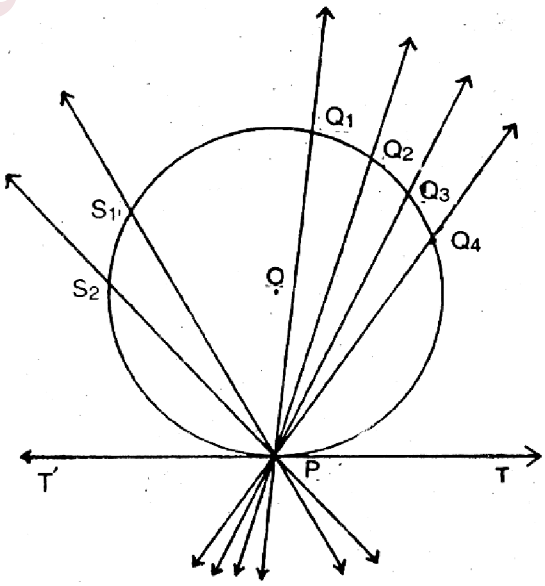
किसी वृत्त की स्पर्श रेखा उस वृत्त के जिस बिन्दु से होकर जाती है, उसे स्पर्श बिन्दु कहते nQ mheMe& efyevog Jeeÿe Deejv Jeeÿe keÀer mheMe& jsKee ceW GYeÙeefve‰ neslee nw efvecveefueefKele efÛe$e ceW t स्पर्श रेखा, O वृत्त का केन्द्र और P स्पर्श बिन्दु है।



वृत्त, वृत्त की स्पर्श रेखा और स्पर्श बिन्दु से सम्बन्धित कुछ उदाहरण हम अपने पास-पड़ोस में देख सकते हैं। जैसे रेलवे लाइन पर खड़ी रेलगाड़ी को देखिए। रेलगाड़ी के पहिए की रिम एक वृत्त है पटरी वृत्त की स्पर्श रेखा है और पहिया जिस बिन्दु पर पटरी को स्पर्श करता है, वह बिन्दु स्पर्श बिन्दु है।



छेदक रेखाओं का समूह और स्पर्श रेखा :



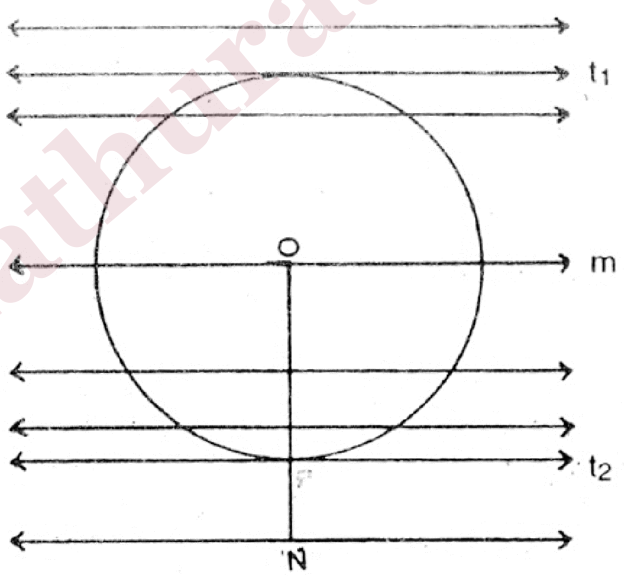
मान लीजिए कि एक वृत्त का केन्द्र O है। वृत्त पर कोई बिन्दु P है। वृत्त के तल में P से होकर जाने वाली रेखाओं के समूह पर विचार कीजिए। इन रेखाओं में से एक को छोड़कर प्रत्येक वृत्त को उसके बिन्दु P के अतिरिक्त एक और बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है।

इस प्रकार P से होकर जाती हुई छेदक रेखाओं का एक समूह है। इनमें से कुछ छेदक रेखाएँ वृत्त को फिर से P के दाई ओर Q_1, Q_2, Q_3 तथा Q_4 बिन्दुओं पर काटती हैं जबकि कुछ अन्य छेदक रेखाएँ P के बायीं ओर S_1 तथा S_2 बिन्दुओं पर काटती हैं।

P से होकर जाने वाली रेखाओं में से केवल एक रेखा ऐसी है, जो वृत्त को P के अतिरिक्त किसी अन्य बिन्दु पर नहीं काटती है। यह वृत्त की स्पर्श रेखा $T'PT$ है।

समान्तर रेखांओं का समूह और स्पर्श रेखा (स्पर्श रेखाएँ) :

पार्श्वांकित चित्र में वृत्त के तल में समान्तर रेखाओं का समूह खींचा गया है। इस समूह में केवल एक रेखा m ऐसी है जो वृत्त के केन्द्र O से होकर जाती है। यह रेखा वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है। इसके अतिरिक्त ऐसी और भी कई रेखाएँ हैं जो वृत्त को दो भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर काटती हैं, जबकि ऐसी बहुत सी रेखाएँ हैं, जो वृत्त को नहीं काटती हैं। दो रेखाएं t_1 और t_2 ऐसी रेखाएँ है जो वृत्त को केवल एक बिन्दु (अथवा दो सम्पाती बिन्दुओं) पर ही काटती हैं। ये दोनों वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।



मान लीजिए कि वृत्त के केन्द्र O से इस समूह की किसी रेखा की दूरी p है और वृत्त की त्रिज्या r है तो हम पाते हैं कि

(i) यदि $p < r$ तो रेखा वृत्त की छेदक रेखा होती है।

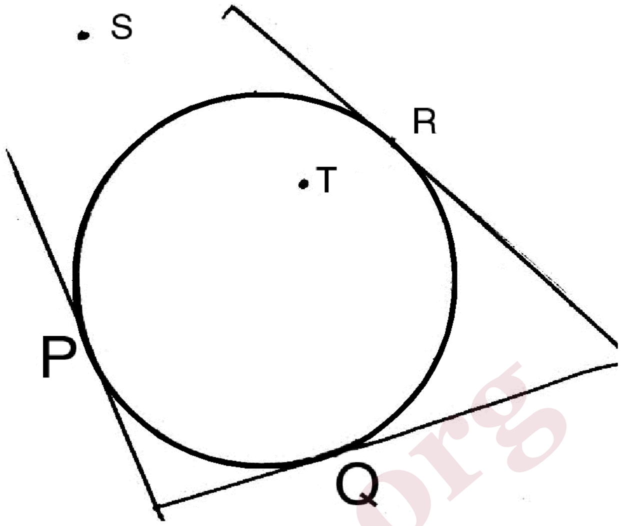
(ii) यदि $p > r$ तो रेखा वृत्त को नहीं काटती है, और

(iii) यदि $p = r$ तो रेखा वृत्त की स्पर्श रेखा होती है।

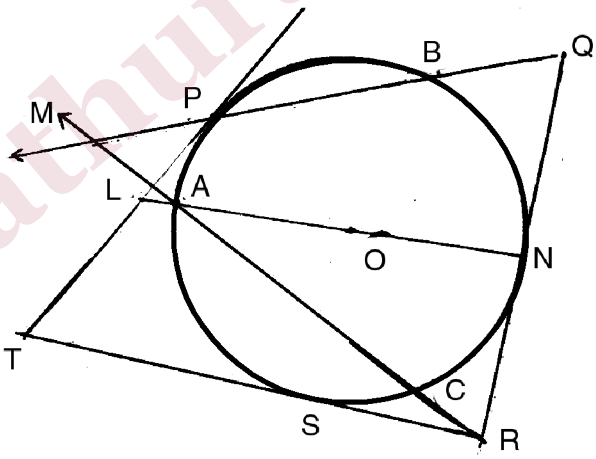
स्थिति (iii) वृत्त की त्रिज्या का अन्त्य बिन्दु और स्पर्श बिन्दु दोनों एक ही हैं। t_1 तथा t_2 वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।

मूल्यांकन :

1. पार्श्व चित्र में बिन्दु S से वृत्त पर वृत्त की कितनी छेदक रेखायें खीची जा सकती हैं तथा वृत्त की कितनी स्पर्श रेखायें हैं स्पर्श बिन्दु कौन-कौन से हैं।



2. पार्श्व चित्र में वृत्त का केन्द्र O है, कुछ रेखा खंड खींचे गये है ज्ञात कीजिए वृत्त की
   (i) तीन छेदक रेखायें
   (ii) तीन स्पर्श रेखायें
   (iii) वृत्त का व्यास
   (iv) दो स्पर्श बिन्दु
   (v) छेदक रेखा MR पर स्थित वे बिन्दु जो वृत्त पर भी स्थित हैं।
   (vi) तीन जीवायें

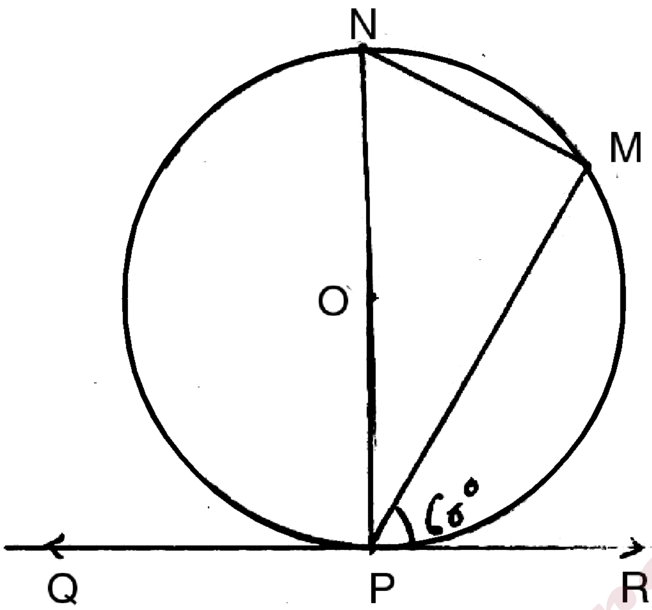


3. केन्द्र O और त्रिज्या r वाले वृत्त की स्पर्श रेखा l है जो वृत्त को P पर स्पर्श करती है। यदि रेखा l पर स्थित कोई बिन्दु Q है, तो निम्नांकित कथनों से सत्य अथवा असत्य कथन छाँटिए :

(i) $OQ > r$	(iv) $OQ = r$
(ii) $OQ < r$	(v) $OP < r$
(iii) $OP = r$	(vi) $OP > r$

4. 3.0 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचिए। इस वृत्त के अभ्यन्तर (वृत्त के अन्दर) एक बिन्दु लीजिए। ज्ञात कीजिए कि क्या P से होकर जाती हुई वृत्त की स्पर्श रेखा खींची जा सकती है?

5. निम्नांकित चित्र में वृत्त का केन्द्र O है तथा QPR वृत्त की स्पर्श रेखा है तथा PN, वृत्त का व्यास है। $\angle MPR = 60°$ तो $\angle PNM$ का मान बताओ।



6. निम्नांकित कथनों में सत्य/असत्य को बताइए।

(i) वृत्त की कोई स्पर्श रेखा तथा स्पर्श बिन्दु से खींची गयी त्रिज्या एक दूसरे पर लम्ब होते हैं।

(ii) किसी वृत्त की छेदिका उस वृत्त के दो से अधिक बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है।

(iii) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा, उस वृत्त को केवल दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है।

———

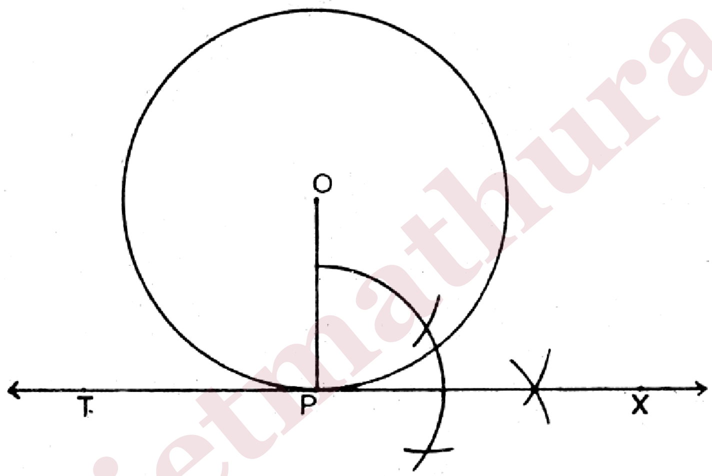
इकाई-20

वृत्त पर दिये गये बिन्दु से स्पर्श रेखा खींचना

किसी वृत्त पर दिये हुए बिन्दु से स्पर्श रेखा की रचना जबकि बिन्दु वृत्त पर स्थित हो:

दिया है : O केन्द्र का एक वृत्त है। वृत्त पर स्थित एक बिन्दु P है।

अभीष्ट : बिन्दु P से होकर जाती हुई वृत्त की स्पर्श रेखा खींचना जो वृत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करे।



रचना : 1. रेखाखंड OP खींच दीजिए।

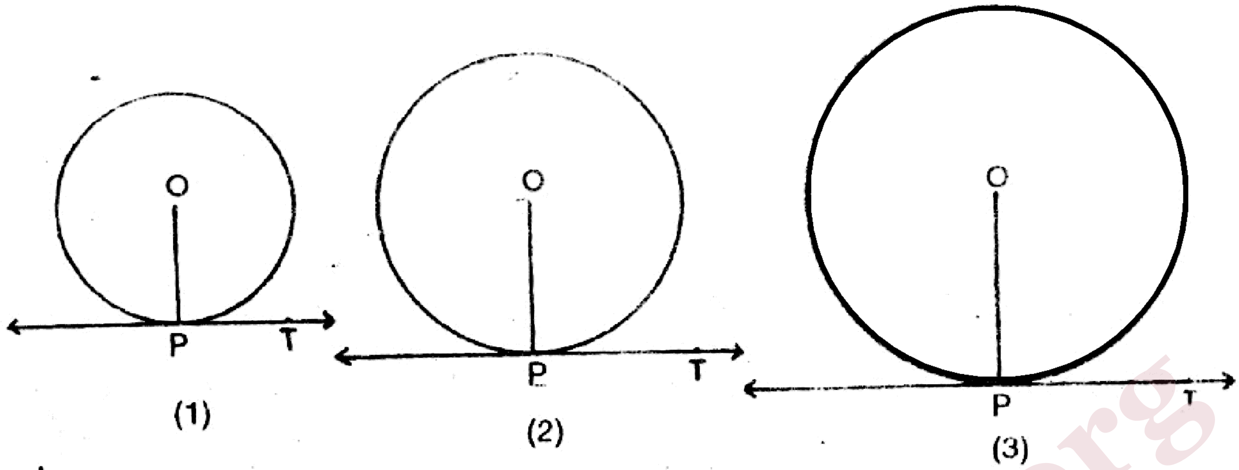
2. बिन्दु P से रेखाखंड OP पर लम्ब PX खींच दीजिए।

3. XP को T तक बढ़ा दीजिए। इस प्रकार XT वृत्त की स्पर्श रेखा हुई जो वृत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करती है।

स्पर्श रेखा और स्पर्श बिन्दु से खींची गयी त्रिज्या परस्पर लम्ब होती है; (प्रयोगात्मक सत्यापन)

क्रियाकलाप : भिन्न-भिन्न केन्द्रों और भिन्न-भिन्न त्रिज्याओं के तीन वृत्त खींचिए। सुविधा के लिए सभी वृत्तों के केन्द्रों को O से नामांकित कीजिए।

पहले वृत्त पर एक बिन्दु P लीजिए। बिन्दु P से वृत्त की स्पर्श रेखा PT खीचिए जो वृत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करती हो। रेखाखंड OP खींचिए और $\angle OPT$ को नापिए तथा $90° - \angle OPT$ का मान ज्ञात कीजिए।



यह प्रक्रिया अन्य दो वृत्तों के लिए दोहराए और प्राप्त परिणामों को निम्नवत् सूचीबद्ध कीजिए।

वृत्त की क्रम संख्या	$\angle OPT$	$90° - \angle OPT$
1.		
2.		
3.		

हम देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में $90° - \angle OPT$ का मान शून्य है या लगभग शून्य है। अतः

वृत्त में किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा और स्पर्श बिन्दु से होकर जाती हुई त्रिज्या परस्पर लम्ब होती हैं।

मूल्यांकन :

1. 2 सेमी त्रिज्या का वृत्त खीचिंए। माना वृत्त का केन्द्र O है। इस वृत्त पर दो त्रिज्यायें OA और OB इस प्रकार खीचिये कि $\angle AOB = 120°$। पुनः बिन्दु A और B पर स्पर्श रेखायें खींचिये। माना ये स्पर्श रेखायें M बिन्दु पर मिलती हैं अब $\angle AMB$ नापिये।
2. 3 सेमी का एक वृत्त खीचिये। वृत्त पर एक बिन्दु A लीजिए। बिन्दु A पर स्पर्श रेखा खीचिए। रचना की सम्पूर्ण विधि लिखिए।
3. निम्नांकित चित्र में वृत्त का केन्द्र O है। PQ वृत्त की बिन्दु T पर स्पर्श रेखा है। AT तथा TB वृत्त की जीवाएँ है तथा $\angle ATB = 90°$ यदि $\angle COB = 62°$ तो

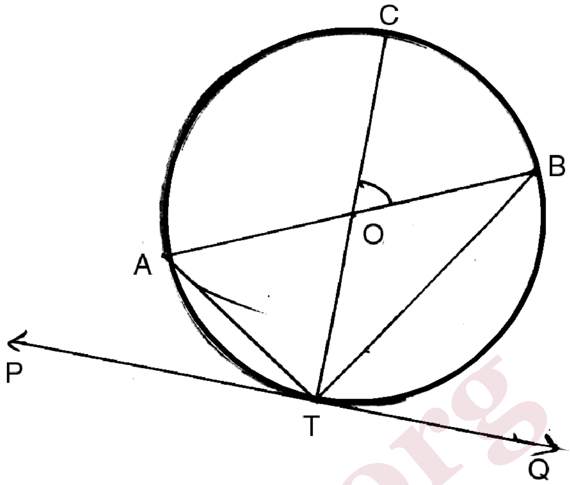
(i) $\angle CTB$

(ii) $\angle BTQ$

(iii) $\angle CTA$

(iv) $\angle ATP$

ज्ञात कीजिए।



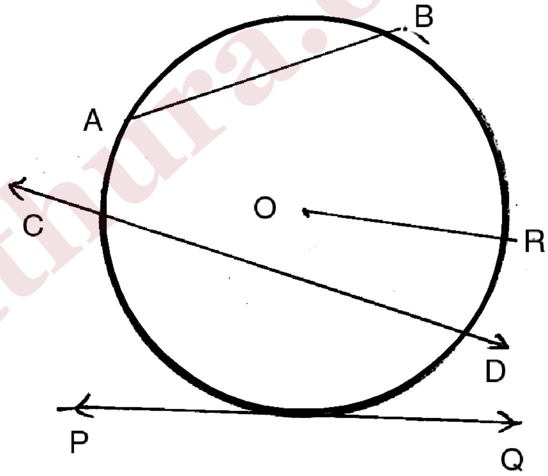
4. पार्श्व चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। चित्र से निम्नलिखित में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) रेखा खण्ड AB वृत्त की ....है।

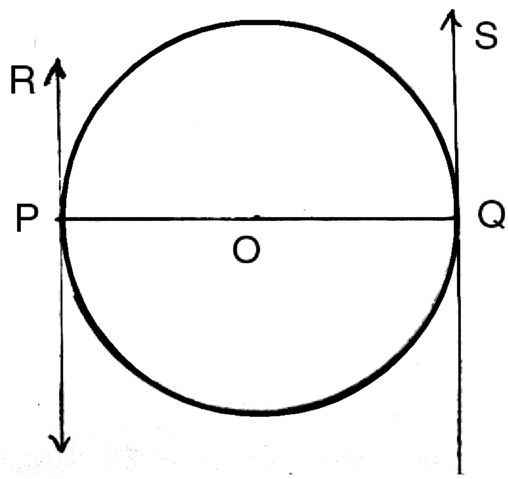
(ii) रेखाखंड OR वृत्त की .... है।

(iii) रेखा CD वृत्त की .... है।

(iv) रेखा PQ वृत्त की .... है।



5. पार्श्व चित्र में PQ वृत्त का व्यास है PR तथा QS इस वृत्त पर क्रमशः बिन्दु P तथा Q पर स्पर्श रेखाएँ हैं। क्या $RP11SQ$?



———